



UNIVERSIDADE D  
COIMBRA

Fábio Rafael Pinheiro Castelo Ferreira

**PREVISÃO DA VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO  
DE FENDAS POR FADIGA NA LIGA TI-6AL-4V**

**Dissertação no âmbito do Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, na especialidade de Produção e Projeto orientada pelo Professor Doutor Diogo Mariano Simões Neto e pelo Professor Doutor Fernando Jorge Ventura Antunes e apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra**

Julho de 2020



1 2



9 0

FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE  
COIMBRA

## **Previsão da velocidade de propagação de fendas por fadiga na liga Ti-6Al-4V**

Dissertação apresentada para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia  
Mecânica na Especialidade de Produção e Projeto

### **Numerical prediction of fatigue crack growth rate in Ti-6Al- 4V alloy**

**Autor**

**Fábio Rafael Pinheiro Castelo Ferreira**

**Orientadores**

**Professor Doutor Diogo Mariano Simões Neto**

**Professor Doutor Fernando Jorge Ventura Antunes**

**Júri**

**Presidente** Professor Doutor Luís Filipe Martins Menezes  
Professor Catedrático da Universidade de Coimbra

**Vogal** Professor Doutor Ricardo Nuno Madeira Soares Branco  
Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Orientador** Professor Doutor Diogo Mariano Simões Neto  
Professor Auxiliar da Universidade de Coimbra

**Coimbra, Julho, 2020**

How wonderful that we met with a paradox.  
Now we have some hope of making progress.

Niels Bohr

À minha família

## Agradecimentos

Gostaria de deixar uma palavra de agradecimento às pessoas que me ajudaram ao longo da realização desta dissertação e ao longo de todo o meu caminho académico:

Aos meus orientadores, Professor Diogo Mariano Simões Neto e Professor Fernando Jorge Ventura Antunes, pelo apoio constante prestado ao longo desta dissertação.

Ao Professor Pedro André Dias Prates pelo fornecimento dos ficheiros Exceis utilizados para obtenção dos parâmetros dos materiais.

Ao Professor Joel Alexandre da Silva de Jesus que me forneceu as curvas experimentais da  $dN-\Delta K$  experimentais e esclarecimento das mesmas.

Ao grupo de Tecnologia do Departamento de Engenharia Mecânica pela disponibilização do programa de elementos finitos *DD3IMP*.

À minha família, amigos e colegas que me ajudaram ao longo de todo o meu percurso académico.

O presente trabalho foi realizado no âmbito do projeto “Métodos computacionais para otimizar o processo de fabrico aditivo SLM” com a referência PTDC/EME-EME/31657/2017, cofinanciado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia e pelo EU/FEDER, através do Programa Operacional Regional do Centro com referência CENTRO-01-0145-FEDER-031657.



## Resumo

A maioria dos componentes mecânicos em serviço está sujeita a carregamentos cíclicos. Portanto, a ruína por fadiga é muito recorrente nestes componentes, sendo usual uma previsão da vida útil dos mesmos com base no pressuposto da existência de defeitos iniciais. A propagação de fendas por fadiga (PFF) é habitualmente estudada usando curvas  $da/dN-\Delta K$  obtidas experimentalmente. É sabido que o fenómeno de propagação de fenda por fadiga está associado a fenómenos irreversíveis, nomeadamente a deformação plástica. Porém, o fator de intensidade de tensão ( $\Delta K$ ) é um parâmetro elástico, desprezando assim os fenómenos irreversíveis associados ao fenómeno de propagação de fendas por fadiga.

O objetivo principal deste estudo é modelar e simular numericamente o processo de propagação de fendas por fadiga em provetes CT. Para isso vai ser utilizado o programa de elementos finitos DD3IMP, sendo que a propagação da fenda é controlada pelo valor da deformação plástica na extremidade da fenda. Com isto, é possível avaliar a propagação de fendas tendo em conta vários fatores, nomeadamente o material e o carregamento aplicado. O material utilizado é o Ti-6Al-4V, sendo que os provetes foram obtidos pelo processo de fabricação fusão seletiva por laser. Para melhorar as propriedades mecânicas do material, estes foram sujeitos a um dos seguintes pós-tratamentos: (i) tratamento térmico para alívio de tensões ou (ii) prensagem isostática a quente para reduzir a porosidade. Relativamente aos espectros de carga estudados, para além da força com amplitude constante, foram estudados os casos de sobrecargas e blocos de carga (crescente e decrescente).

A comparação entre resultados numéricos e experimentais permite fazer a validação do modelo de elementos finitos, nomeadamente os critérios de propagação propostos. O efeito das condições de fronteira adotadas no modelo numérico tem um impacto significativo no comportamento da velocidade de propagação, sendo que os resultados obtidos em estado plano de tensão se aproximam mais dos valores experimentais. Os resultados numéricos mostram que o aumento da razão de tensões conduz a uma subida da curva  $da/dN-\Delta K$ . Fez-se o estudo do limiar de propagação, que é o valor de  $\Delta K$  abaixo do qual não existe deformação plástica na frente de fenda e por

consequente não existe propagação da fenda. A aplicação de sobrecargas permite avaliar o comportamento transiente da fenda, nomeadamente a diminuição brusca da velocidade de propagação e subsequente convergência para a velocidade de propagação base. A velocidade de propagação tem também um comportamento transiente no caso de aplicação de dois blocos de carga (crescente ou decrescente). Em ambos os casos, o atraso no regresso ao regime permanente da velocidade de propagação é mais pronunciado considerando o estado plano de tensão em comparação com o estado plano de deformação.

**Palavras-chave:** Propagação de fendas por fadiga, Simulação numérica, Sobrecargas, Deformação plástica, Ti-6Al-4V.

---

## Abstract

Most mechanical components in service are under cycle loading. Thus, the failure of these components by fatigue is very usual, requiring the prediction of their useful life based on the assumption of existence of initial defects. The prediction of crack propagation is usually studied using  $da/dN$ - $\Delta K$  curves, obtained experimentally. However, despite the irreversibility of the phenomena that occur at the tip of the crack, the parameter  $\Delta K$  is an elastic parameter.

The main goal of this study is to model and numerically simulate the process of fatigue crack propagation in CT specimens. The finite elements software DD3IMP will be used, where the crack propagation is controlled by the value of plastic deformation at the crack tip. This allows evaluate the fatigue crack propagation considering different factors, such as material and applied loading. The used material is Ti-6Al-4V, where the specimens were obtained by a additive manufacturing process called SLM (Selective Laser Melting). In order to improve the mechanical properties of the material, the specimens were subjected to a post-treatment: (i) heat treatment for stress relief or (ii) HIP (Hot Isostatic Pressing) to reduce porosity. Regarding the load spectra studied, in addition to the force with constant amplitude, the cases of overloads and load blocks (increasing and decreasing) were studied.

The comparison between numerical and experimental results allows the validation of finite element model, namely the proposed crack growth criteria. The effect of boundary conditions adopted in the numerical model has a significant impact on the behavior of the fatigue crack growth rate, where results obtained under plane stress state are closer to the experimental values. The numerical results show that the increase in stress ratio (R) leads to the rise of the  $da/dN$ - $\Delta K$  curve. The propagation threshold study was carried out, allowing the evaluation of the minimum value of  $\Delta K$  for which there is no increase in plastic deformation at the crack tip and therefore there is no propagation. The transient behavior of the fatigue crack growth rate resulting from the application of overloads was numerically evaluated, namely the sudden decrease in the propagation rate and subsequent convergence to the base line. The application of two load blocks



(increasing or decreasing) leads also a transient behavior in the fatigue crack growth rate. In both cases, the delay in returning to the steady state of propagation speed is more pronounced considering the plane stress compared to plane strain.

**Keywords** Fatigue crack growth, Numerical simulation, Overloads, Plastic deformation, Ti-6Al-4V.

## Índice

Índice de Figuras .....	viii
Índice de Tabelas .....	xi
Simbologia e Siglas .....	xii
Simbologia.....	xii
Siglas .....	xiv
1. Introdução.....	1
1.1. Motivação .....	1
1.2. Objetivos.....	2
1.3. Estrutura da dissertação .....	2
2. Revisão bibliográfica.....	4
2.1. Fenómeno da fadiga.....	4
2.2. Mecânica de Fratura Linear Elástica (MFLE) .....	5
2.3. Alterações à teoria MFLE.....	8
3. Procedimento experimental.....	11
3.1. Material usado.....	11
3.2. Ensaio experimentais.....	12
4. Modelo constitutivo do material.....	15
4.1. Teoria da plasticidade .....	15
4.2. Critério de cedência .....	16
4.2.1. Critério de cedência isotrópicos .....	16
4.2.2. Critérios de cedência anisotrópicos .....	18
4.3. Lei de encruamento.....	19
4.3.1. Encruamento isotrópico.....	19
4.3.2. Encruamento cinemático .....	21
4.4. Calibração dos parâmetros do material.....	22
5. Modelo numérico do ensaio mecânico .....	24
5.1. Programa de elementos finitos.....	24
5.2. Modelo de elementos finitos.....	25
5.2.1. Condições de fronteira.....	25
5.2.2. Discretização do provete .....	26
5.2.3. Critérios de propagação da fenda .....	27
5.2.4. Carregamentos aplicados.....	28
6. Resultados numéricos .....	29
6.1. Amplitude de carga constante.....	29
6.1.1. Calibração dos parâmetros do material .....	29
6.1.2. Estabilização da zona plástica .....	32
6.1.3. Velocidade de propagação da fenda .....	34
6.1.4. Efeito da razão de tensão .....	37

---

6.1.5.	Avaliação do limiar de fadiga.....	39
6.2.	Amplitude de cargas constantes com sobrecargas .....	41
6.2.1.	Efeito do rácio de sobrecarga .....	42
6.2.2.	Influência do comprimento de fenda .....	44
6.3.	Amplitude de cargas variável definida por blocos.....	49
6.3.1.	Espectro crescente .....	50
6.3.2.	Espectro decrescente.....	51
6.3.3.	Influência dos blocos na PFF .....	53
7.	Conclusões.....	55
8.	Bibliografia.....	59

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Descrição do fenómeno de fadiga em quatro fases. ....	4
Figura 2.2. Curva típica $da/dN - \Delta K$ [1] .....	7
Figura 2.3. Representação esquemática do $\Delta K_{eff}$ . Adaptado de [6]. ....	9
Figura 3.1. Provete de fadiga oligocíclica e as suas dimensões (mm). ....	13
Figura 3.2. Dimensões (mm) e direções dos carregamentos do provete CT. Adaptado de [26]. ....	13
Figura 3.3. Curvas $da/dN - \Delta K$ experimentais do material Ti-6Al-4V para ambos os tratamentos (HIP e TT) para uma razão de tensão igual a 0,05. ....	14
Figura 4.1. Representação das superfícies limites de elasticidade dos critérios de cedência von Mises e Tresca no plano $(\sigma_1, \sigma_2)$ [30] .....	17
Figura 4.2. (a) Evolução da superfície de limite de elasticidade no plano $(\sigma_1, \sigma_2)$ segundo o encruamento isotrópico, (b) a correspondente curva de tensão vs deformação plástica. Adaptado de [30].....	20
Figura 4.3. À esquerda encontra-se representada a evolução da superfície de limite de elasticidade no plano $(\sigma_1, \sigma_2)$ segundo o encruamento cinemático, e à direita a correspondente curva de tensão vs deformação plástica. Adaptado de [30] .....	22
Figura 4.4. Comparação entre as curvas cíclicas tensão-deformação experimentais e numéricas: (a) Ti-6Al-4V com tratamento HIP; (b) Ti-6Al-4V com TT.....	23
Figura 5.1. Representação esquemática do modelo do provete CT (a). Condições de fronteira: (b) estado plano de deformação (DP); e (c) estado plano de tensão (TP). ....	26
Figura 5.2. Ilustração da malha no provete CT (parte de cima). Inclui ainda a ampliação da zona da fenda na qual a malha é mais refinada. ....	27
Figura 6.1. Calibração dos valores críticos de $\Delta \epsilon^P$ do critério de propagação IPS para os diferentes comprimentos de fenda comparando as condições de fronteira (DP e TP): (a) Material: Ti-6Al-4V + HIP; (b) Material Ti-6Al-4V + TT. ....	30
Figura 6.2. Evolução da deformação plástica na extremidade da fenda ao longo de duas propagações nodais considerando o estado plano de tensão (TP) para diferentes comprimentos de fenda no material Ti-6Al-4V + HIP: (a) critério de propagação IPS; (b) critério de propagação TPS.....	32
Figura 6.3. Previsão da velocidade de PFF em função do número de ciclos para os diferentes comprimentos de fenda no material Ti-6Al-4V + TT: (a) estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico de $\epsilon^P=1,254$ ; (b) estado de plano de tensão (TP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico de $\epsilon^P=2,233$ .....	33

Figura 6.4. Comparação entre as curvas $da/dN - \Delta K$ experimentais e numéricas para o material Ti-6Al-4V + HIP: (a) Previsão da velocidade de propagação considerando estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação IPS e TPS; (b) Previsão da velocidade de propagação considerando o estado plano de tensão (TP) usando os critérios de propagação IPS e TPS. ....	34
Figura 6.5. Comparação entre as curvas $da/dN - \Delta K$ experimentais e numéricas para o material Ti-6Al-4V + TT: (a) Previsão da velocidade de propagação considerando estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação IPS e TPS; (b) Previsão da velocidade de propagação considerando o estado plano de tensão (TP) usando os critérios de propagação IPS e TPS. ....	35
Figura 6.6. Zona plástica em redor da extremidade da fenda com diferentes comprimentos de fenda inicial no material Ti-6Al-4V + TT: (a) estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico igual a $\epsilon^P=1,254$ ; (b) estado plano de tensão (TP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico de $\epsilon^P=2,233$ .....	37
Figura 6.7. Efeito da razão de tensão na curva $da/dN-\Delta K$ considerando o contacto dos flancos da fenda, para o material Ti-6Al-4V + HIP utilizando o critério de propagação TPS com valor crítico $\epsilon^P$ igual a 1,533 com $R=0,5$ e $R=0,05$ . ....	38
Figura 6.8. Comparação dos resultados numéricos (com contacto nos flancos vs sem contacto nos flancos) para as razões de tensão $R=0,05$ e $R=0,5$ . ....	39
Figura 6.9. Evolução da velocidade em função do comprimento de fenda para diferentes cargas mínimas. ....	40
Figura 6.10 Resultados de PFF considerando com e sem modelação do contacto dos flancos da fenda em estado plano de tensão: (a) Velocidade de propagação em função do parâmetro $\Delta K$ ; (b) Velocidade de propagação em função da razão de tensão ( $R$ ). ....	41
Figura 6.11. Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda para diferentes rácios de sobrecargas (OLR), obtida considerando um comprimento de fenda inicial igual a 16 mm: (a) estado plano de deformação; (b) estado plano de tensão. ....	43
Figura 6.12. Evolução do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos para diferentes rácios de sobrecargas (OLR) considerando um comprimento de fenda inicial igual a 16 mm: (a) estado plano de deformação; (b) estado plano de tensão. ....	44
Figura 6.13. Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 1,5 para diferentes comprimentos de fenda, considerando estado plano de deformação (DP): (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos. ....	45
Figura 6.14. Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 1,5 para diferentes comprimentos de fenda, considerando o estado plano de tensão (TP). (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.....	46

---

Figura 6.15. Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 1,5 e comprimento de fenda igual a 17,4 mm, com e sem modelação do contacto entre os flancos da fenda. (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos. ....	46
Figura 6.16. Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 2,0 para diferentes comprimentos de fenda, em o estado plano de deformação (DP). (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.....	48
Figura 6.17. Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 2,0 para diferentes comprimentos de fenda, em estado plano de tensão (TP). (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.....	48
Figura 6.18. Representação esquemática dos espectros de carga estudados na presente dissertação para a situação de amplitude de carga variável definida por blocos: espectro crescente (a) e espectro decrescente (b). ....	50
Figura 6.19. Comportamento transiente para a situação de amplitude de carga variável definida por blocos (espectro crescente): (a) evolução da velocidade de propagação com o comprimento da fenda: (b) evolução do comprimento de fenda com o número de ciclos de carga aplicados. ....	51
Figura 6.20. Evolução da propagação de fenda para o caso de espectro decrescente na zona de mudança de blocos de carga. ....	52
Figura 6.21. Distribuição da deformação plástica ao longo da fenda numa situação de amplitude de cargas variável definida por blocos (espectro decrescente) considerando o estado plano de deformação (DP) no Ti-6Al-4V +HIP. ....	53
Figura 6.22. Resultados numéricos obtidos para o estudo da influência dos blocos na PFF: (a) para o estado plano de deformação (DP); (b) estado plano de tensão (TP). ....	54

---

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1. Composição química do pó da liga de titânio Ti-6Al-4V [peso em percentagem] .....	12
Tabela 4.1. Equações de modelos de encruamento isotrópico .....	20
Tabela 4.2. Equações de modelos de encruamento cinemático.....	21
Tabela 4.3. Parâmetros das leis de encruamento (Swift e Armstrong-Frederich) para dois casos estudados da liga de titânio Ti-6Al-4V .....	23
Tabela 6.1. Valores críticos de $\Delta \epsilon^P$ do critério de propagação de fenda à fadiga IPS, para as várias situações estudadas.....	30
Tabela 6.2. Valores críticos de $\epsilon^P$ do critério de propagação de fenda à fadiga TPS, para as várias situações estudadas.....	31

## SIMBOLOGIA E SIGLAS

### Simbologia

$A$  – Conjunto de parâmetros dos modelos de Swift e de Armstrong-Frederich que minimiza  $F(A)$

$a$  – Comprimento de fenda

$a_0$  – Comprimento inicial de fenda

$a, C_Y, Y_0$  – Parâmetro do modelo de encruamento de Voce

$C, m$  – Parâmetros da lei de Paris-Erdogan

$C$  – Parâmetro do material do modelo de encruamento isotrópico Gosh

$C_X, X_{Sat}$  – Parâmetros do modelo de encruamento de Armstrong-Frederich

$CTOD_p$  – CTOD plástico

$da/dN$  – Velocidade de propagação por ciclo de carga

$E$  – Módulo de Young

$F(A)$  – Função de mínimos quadrados

$F, G, H, L, M, N$  – Parâmetros obtidos experimentalmente do critério de Hill '48

$g, h$  – Parâmetros do material do modelo isotrópico Fernandes et al.

$n, K$  – Parâmetros do material dos modelos isotrópicos: Hollomon, Swift, Ludwick, Ludwickson, Gosh e Fernandes et al.

$K$  – Fator de intensidade de tensão

$K_{máx}$  – Fator de intensidade de tensão máximo

$K_{mín}$  – Fator de intensidade de tensão mínima

$K_{IC}$  – Tenacidade à fratura

$K_{aberto}$  – Parâmetro de intensidade de tensão na frente da fenda abaixo da qual não ocorre propagação de fenda por fadiga

$n_1, K_1$  – Parâmetro do material do modelo isotrópico Ludwigson

OLR – Rácio de sobrecarga



$q_P$  – Parâmetro do material do modelo cinemático de Prager  
 $q_Z$  – Parâmetro do material do modelo cinemático de Ziegler  
 $R$  – Razão de tensão  
 $r$  – Coeficiente de anisotropia  
 $X'$  – Tensor desviador das tensões inversas  
 $Y$  – Parâmetro adimensional caracterizador da geometria/ Tensão de cedência  
 $Y_{sat}$  – Parâmetro do material do modelo isotrópico de Voce  
 $\alpha$  – Direção do material  
 $\beta$  – Parâmetros dos modelos de encruamento do material  
 $\varepsilon_0$  – Parâmetro do material dos modelos isotrópicos: Swift, Gosh e Fernandes

et al.

$\varepsilon^P$  – Deformação plástica total  
 $\bar{\varepsilon}^P$  – Deformação plástica equivalente  
 $\sigma_I$  – Tensão principal máxima  
 $\sigma_{III}$  – Tensão principal mínima  
 $\sigma_0$  – Tensão uniaxial máxima  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – Tensões principais  
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  – Componentes do tensor de Cauchy  
 $\sigma_{m\acute{a}x}$  – Tensão máxima  
 $\sigma_{m\acute{i}n}$  – Tensão mínima  
 $\sigma^{Fit}$  – Tensão obtida pelos modelos  
 $\sigma_{Exp}$  – Tensão obtida pelo ensaio experimental  
 $\sigma'$  – Componente desviador do tensor das tensões de Cauchy  
 $\tau_0$  – Tensão máxima de corte  
 $\nu$  – Coeficiente de Poisson  
 $\Delta\varepsilon^P$  – Incremento de deformação plástica  
 $\Delta K$  – Gama do fator de intensidade de tensão  
 $\Delta K_{eff}$  – Gama efetiva do fator de intensidade tensão  
 $\Delta K_{BL}$  – Variação de magnitude de tensão na frente da fenda na base do carregamento

$\Delta K_{OL}$  – Variação de magnitude de tensão na frente da fenda no pico do carregamento

$\Delta K_{th}$  – Limiar de propagação

## Siglas

2D – Bidimensional

3D – Tri-dimensional

ASTM – American Society for Testing and Materials

CJP – Christopher James Patterson

CT – Provete *compact Tension*

DD3IMP – *Deep drawing 3D IMPLICIT finite element solver*

DP – Estado plano de deformação

HIP – *Hot Isostatic Pressing*

IPS – *Increment Plastic strain*

MFLE – Mecânica de fratura linear elástica

PF – Propagação de fenda

PFF – Propagação de fenda por fadiga

SLM – *Selective Laser Melting*

TP – Estado plano de tensão

TPS – *Total Plastic Strain*

TT – Tratamento térmico

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Motivação

As solicitações dinâmicas aplicadas numa peça podem provocar um tipo de ruína, conhecida por fadiga, que se sabe ser a causa de 80% a 90% de todas as ruínas de peças e estruturas submetidas a esforços mecânicos e que trabalham a temperaturas na zona de temperatura ambiente. A fadiga de um material define-se como um “fenómeno de enfraquecimento progressivo de um material quando este está submetido a cargas dinâmicas ou repetidas” [1].

A estimativa do tempo de vida e da velocidade de propagação da fenda são indicadores muito importantes para este tipo de problemas de engenharia. Assim, estes indicadores continuam a ser alvo de muitas pesquisas. Contudo, muitas vezes é difícil obter resultados experimentais devido aos custos avultados e tempos elevados. De forma a contornar estas desvantagens das avaliações experimentais, as simulações computacionais mostram-se muito úteis. Os estudos numéricos são particularmente interessantes para desenvolver estudos paramétricos e para identificar os mecanismos fundamentais subjacentes ao fenómeno de fadiga.

Os resultados que apresentam a velocidade de propagação da fenda são geralmente representados em curvas  $da/dN-\Delta K$  em que  $da/dN$  é a velocidade de propagação por ciclo de carga e  $\Delta K$  é a gama do fator de intensidade de tensão. Ao contrário de  $\Delta K$ , a propagação de fenda por fadiga está relacionada com mecanismos não lineares e irreversíveis que ocorrem na extremidade da fenda. Devido a isto, existem muitos modelos desenvolvidos para encarar o problema de propagação de fendas por fadiga, porém não existe nenhum que seja universalmente aceite. Isto deve-se à grande complexidade do problema pois existem muitos fatores importantes para a propagação de fenda à fadiga. Alguns exemplos de fatores que influenciam a propagação de fenda são: histórico do carregamento, material, geometria e condições ambientais.

## 1.2. Objetivos

O objetivo principal desta dissertação é modelar e simular numericamente o processo de propagação de fendas por fadiga em provetes CT. Para isso vai ser utilizado o programa de elementos finitos DD3IMP, assumindo que a propagação da fenda é controlada pelo valor de deformação plástica existente na extremidade da fenda. Deste modo é possível avaliar a velocidade de propagação em função de vários fatores, em particular o material e o carregamento. Em relação ao carregamento, pretende-se estudar vários espectros, nomeadamente amplitude constante, blocos de carga e sobrecargas. De forma a validar o modelo numérico de propagação de fendas de fadiga, os resultados numéricos serão comparados com resultados obtidos experimentalmente. Além disso, será feita uma comparação entre diferentes parâmetros não lineares de extremidade de fenda.

## 1.3. Estrutura da dissertação

A presente dissertação será dividida em 7 capítulos:

- **1º Capítulo, Introdução:** Introdução à temática a ser estudada, sua motivação e apresentação da estrutura da dissertação;
- **2º Capítulo, Revisão bibliográfica:** Abordagem de alguns conceitos necessários para a compressão dos resultados, e apresentação de soluções já existentes na literatura. Nesta secção é feita uma revisão aprofundada da mecânica da fratura linear elástica, geralmente utilizada no estudo deste tipo de problemas;
- **3º Capítulo, Procedimento experimental:** Apresentação dos materiais utilizados e descrição ensaios experimentais realizados. São apresentados os resultados provenientes de ensaios de fadiga oligocíclica e ensaios de propagação de fendas por fadiga utilizando provetes CT;
- **4º Capítulo, Modelo constitutivo do material:** Apresentação dos modelos constitutivos usados para descrever o comportamento mecânico do material. Além disso, é apresentado o método utilizado

para a obtenção de alguns parâmetros do material, posteriormente utilizados nas simulações numéricas;

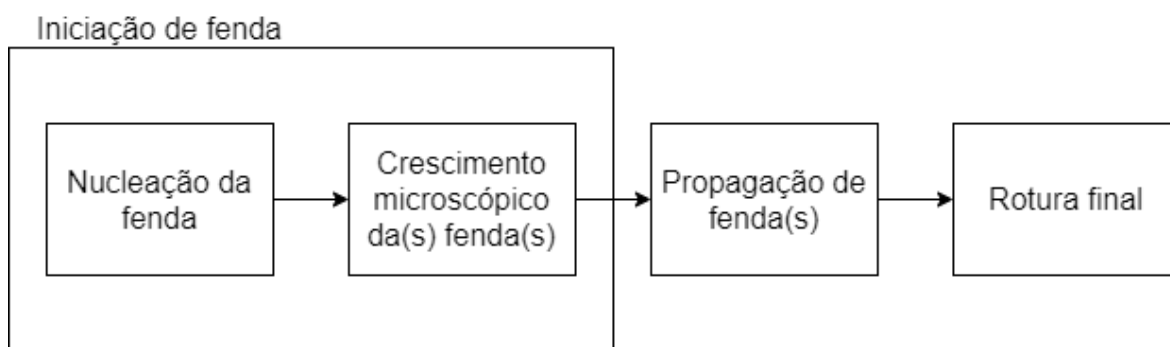
- **5º Capítulo, Modelo numérico do ensaio mecânico:** Descrição do modelo de elementos finitos, incluindo a descrição dos critérios de propagação baseados na deformação plástica. O refinamento da malha de elementos finitos é realçado, bem como as diferentes condições de fronteira utilizadas;
- **6º Capítulo, Resultados numéricos:** Apresentação e discussão dos resultados obtidos. O foco principal está na previsão da velocidade de propagação da fenda. Assim, são apresentados resultados para casos de amplitude de tensão constante, sobrecargas e blocos de carga;
- **7º Capítulo, Conclusões:** Apresentação das principais conclusões e propostas para trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta secção serão abordados conceitos essenciais para um melhor entendimento dos resultados apresentados e discutidos neste trabalho, bem como algumas das abordagens usadas no estudo do fenómeno de fadiga.

### 2.1. Fenómeno da fadiga

A ASTM definiu com muita clareza o que entende por fadiga: “Fadiga é um processo de alteração estrutural permanente, progressivo e localizado que ocorre num material sujeito a condições produtoras de tensões ou extensões dinâmicas num ponto ou em vários pontos, e que pode culminar em fissuras ou numa fratura completa, após um número suficiente de variações de carga” [1]. Como é dito acima, a fadiga é um processo progressivo e esta progressão é geralmente dividida em quatro fases. Na Figura 2.1 são apresentadas as várias fases, bem como a ordem em que estas ocorrem no fenómeno de fadiga.



**Figura 2.1.** Descrição do fenómeno de fadiga em quatro fases.

Nas duas primeiras fases do fenómeno de fadiga é onde se dá a iniciação da fenda. A iniciação da fenda desenvolve-se a uma velocidade lenta e dá-se, de modo geral, em locais onde a concentração de tensões é mais elevada. Estes locais são por exemplo: acidentes geométricos e imperfeições na superfície do material. A fase de propagação de fenda, no modo I, é caracterizada pela propagação da fenda se dar perpendicularmente à

força aplicada. A fase de rotura final dá-se quando o comprimento de fenda atinge um certo valor crítico. Nesta fase, a propagação é extremamente instável e a velocidade de propagação é muito elevada.

A ruína por fadiga só acontece quando a tensão nominal aplicada ultrapassa um determinado valor limite. Sempre que a tensão ultrapasse esse valor limite, o período de iniciação de fenda diminuirá. Portanto, nas peças com concentrações de tensões, e para tensões nominais suficientemente elevadas, o período de iniciação de fenda pode ser reduzido, e o período de propagação será predominante [1].

## 2.2. Mecânica de Fratura Linear Elástica (MFLE)

É universalmente reconhecido que o fenómeno de propagação de fenda (PF) em materiais metálicos é afetado por efeitos não lineares na maior parte dos materiais, e até o comportamento elástico pode apresentar um comportamento não linear nas zonas onde a tensão é mais elevada. Contudo a análise da distribuição de tensão ao redor da extremidade da fenda é geralmente feita tendo por base a teoria da mecânica da fratura linear elástica (MFLE). Esta aproximação usando a teoria MFLE é aceitável se a região com o comportamento não linear for muito pequena em relação ao comprimento da fenda e às outras dimensões da peça estudada.

A teoria MFLE foi inicialmente desenvolvida por Irwin [2] com o objetivo de descrever o comportamento da fratura. Posteriormente esta teoria foi adaptada para os problemas de propagação de fendas por fadiga (PFF). A grande conquista da teoria MFLE foi a introdução do parâmetro,  $K$ , sendo este útil para quantificar a intensidade de tensão na frente da fenda. Para calcular o parâmetro  $K$  é necessário introduzir vários parâmetros tais como: um parâmetro adimensional,  $Y$ , que caracteriza a geometria do componente, o comprimento da fenda e o carregamento aplicado. O fator de intensidade de tensão,  $K$ , é dado pela seguinte equação:

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a}, \quad (2.1)$$

onde  $Y$  é um parâmetro adimensional,  $\sigma$  é a tensão nominal remota e  $a$  o comprimento da fenda.

Como já foi dito anteriormente, o fenómeno de fadiga acontece quando um componente se encontra sujeito a cargas cíclicas. Por essa razão, o valor de  $K$  irá variar ao

longo do tempo, e por essa razão para o estudo do fenómeno de fadiga utiliza-se a gama do fator de intensidade de tensão,  $\Delta K$ . A gama do fator de intensidade de tensão é dado pela seguinte equação:

$$\Delta K = K_{\text{máx}} - K_{\text{mín}}, \quad (2.2)$$

onde  $K_{\text{máx}}$  e  $K_{\text{mín}}$  são respetivamente, os fatores de intensidade de tensão máxima e mínima.

Na teoria MFLE, a propagação de fendas é estudada a partir de curvas  $da/dN$ - $\Delta K$ . Estas curvas têm três regimes que são facilmente detetáveis Figura 2.2.

- **Regime I:** À medida que  $\Delta K$  diminui, a velocidade de propagação de fenda baixa drasticamente. A assíntota em  $\Delta K_{\text{th}}$  é o limiar de propagação de fenda, também conhecido por limiar de fadiga (ver Figura 2.2). Por outras palavras, para valores de  $\Delta K$  abaixo do valor de  $\Delta K_{\text{th}}$  a propagação de fenda é inexistente.
- **Regime II:** Também conhecido por regime de Paris, neste regime a curva evolui linearmente numa escala bi-logarítmica (ver Figura 2.2). Este regime é regido pela equação de Paris-Erdogan [3], dada por:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (2.3)$$

onde  $C$  e  $m$  são parâmetros da equação de Paris-Erdogan.

- **Regime III:** Neste regime, quando o  $\Delta K$  aumenta, a velocidade de propagação da fenda aumenta de uma maneira instável. Este regime pode acontecer quando  $K_{\text{máx}}$  se aproxima de  $K_{\text{IC}}$ . O parâmetro  $K_{\text{IC}}$  é o valor por o qual é espectável que ocorra fratura.



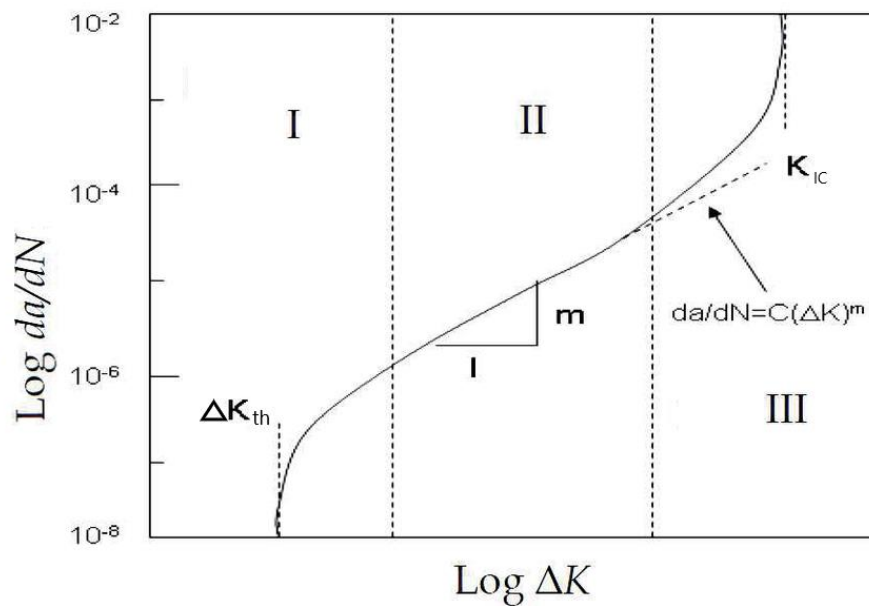


Figura 2.2. Curva típica  $da/dN - \Delta K$  [1]

Apesar de esta teoria ser muito utilizada e existirem já muitas soluções na literatura, a utilização do parâmetro  $\Delta K$  levanta alguns problemas. Isto deve-se ao facto de o fenómeno de PFF estar ligado a mecanismos não lineares e irreversíveis que acontecem na ponta da fenda, nomeadamente a deformação plástica, enquanto que  $\Delta K$  é um parâmetro elástico [4]. Por conta disto, vários problemas foram identificados tais como:

- Incapacidade de prever a influência da razão de tensão (R);

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}, \quad (2.4)$$

onde  $\sigma_{\min}$  e  $\sigma_{\max}$  são a tensão mínima e máxima do ciclo de carga, respetivamente;

- Incapacidade de prever a influência do histórico de carregamento;
- Comportamento estranho observado em fendas pequenas;
- Problemas dimensionais da curva  $da/dN - \Delta K$ ;
- Validade limitada da teoria MFLE.

### 2.3. Alterações à teoria MFLE

Devido ao facto de a teoria da MFLE apresentar limitações no que diz respeito ao fenómeno de PFF, foram e são desenvolvidos modelos que permitem descrever o fenómeno de PFF com maior exatidão.

Uma das abordagens mais utilizadas nos dias de hoje para ultrapassar algumas das limitações das curvas  $da/dN-\Delta K$  é o modelo de fecho de fenda à fadiga. O fenómeno de fecho de fenda à fadiga foi detetado pela primeira vez por Elber [5] e é um fenómeno extrínseco da mecânica de PFF. Este fenómeno consiste no contacto das superfícies opostas da fenda sujeita à fadiga antes de se atingir o carregamento mínimo do ciclo.

As leis de PFF que incluem o efeito de fecho de fenda à fadiga são baseadas na relação entre a velocidade de propagação da fenda,  $da/dN$ , e a magnitude de tensão efetiva na frente da fenda,  $\Delta K_{eff}$  [6]. A fórmula geral das leis de PFF para o regime II (regime Paris-Erdogan), tendo em conta o efeito de fecho de fenda à fadiga, tem a seguinte forma,

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m, \quad (2.5)$$

onde  $C$ ,  $m$  são parâmetros da lei de Paris-Erdogan, e em que  $\Delta K_{eff}$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$\Delta K_{eff} = K_{m\acute{a}x} - K_{aberto}, \quad (2.6)$$

em que  $K_{aberto}$  é o valor de intensidade de tensão na frente da fenda abaixo do qual a fenda se encontra fechada. Na Figura 2.3 é apresentado um esquema representativo de um espectro de carga que procura mostrar o parâmetro  $\Delta K_{eff}$ . Este fenómeno continua a ser muito estudado e ao longo do tempo foram aparecendo diferentes mecanismos que explicam o fenómeno de fecho de fenda à fadiga.

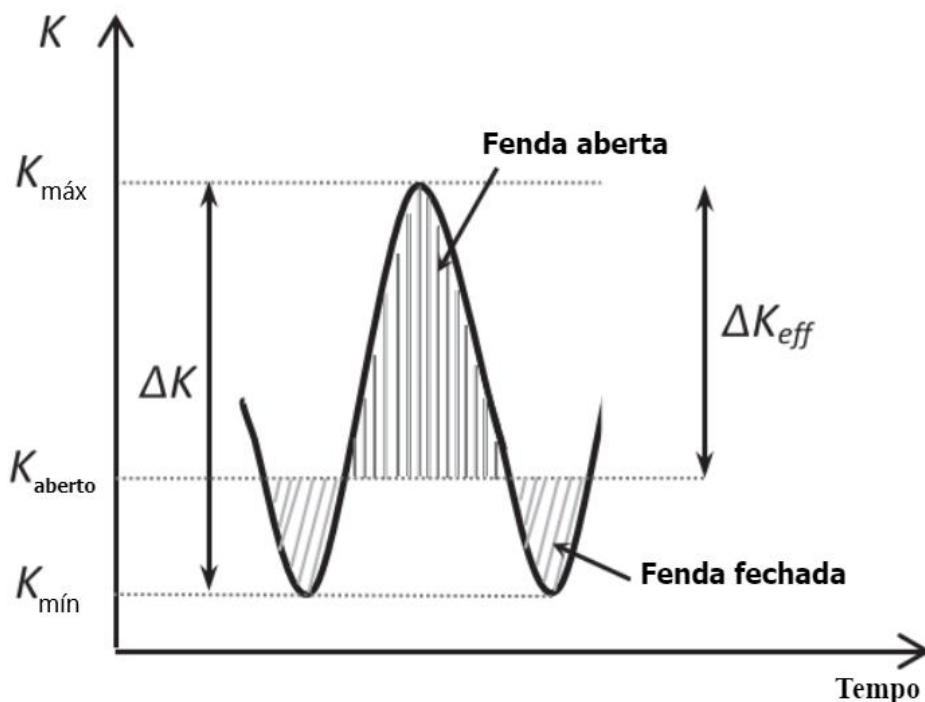


Figura 2.3. Representação esquemática do  $\Delta K_{eff}$ . Adaptado de [6].

Para muitos investigadores o mecanismo primário para o fecho da fenda é a plasticidade [7]. Elber descobriu que a deformação plástica influencia o fenómeno de PFF também de uma forma extrínseca, e com esta descoberta foi possível explicar alguns comportamentos estranhos no âmbito da PFF, como por exemplo: o efeito da razão de tensão ( $R$ ), o comportamento de fendas curtas e a influência do espectro de carregamento na PFF. Este mecanismo baseia-se na formação de uma zona plástica na extremidade da fenda, constituída por material deformado de forma irreversível, devido à concentração de tensões. Essa deformação torna-se residual com a propagação de fenda e durante a descarga, o retorno do material deformado à posição inicial, em regime elástico induz tensões de compressão que promovem o contacto entre ambas as faces da fenda antes de se atingir a carga mínima do ciclo de carregamento [8]. Além da influência da plasticidade na extremidade da fenda, existem outros mecanismos que podem ajudar a explicar o fenómeno de fecho de fenda nomeadamente a oxidação [9] e a rugosidade [10].

Autores como Donald e Paris [11] e Kujawski [12] propõem um meio-termo para o mecanismo de fecho de fenda, denominado fecho de fenda parcial. Assim sendo, estes autores propõem que a porção do carregamento abaixo do  $K_{aberto}$  também contribui

para a PFF. Isto deve-se ao facto de, segundo estes autores, o contacto dos flancos da fenda não acontecer imediatamente atrás da extremidade da fenda.

A tensão T-stress [13] é outro conceito utilizado para estudar a PFF. Esta abordagem consiste em medir a tensão paralelamente aos flancos da fenda. O sinal e a magnitude de T-stress altera substancialmente o tamanho e a forma da zona plástica na extremidade da fenda [14].

O modelo CJP (Christopher James Patterson) [15] procura atingir os mesmos objetivos de outras abordagens de problemas PFF que utilizam o fator de intensidade de tensão,  $K$ . Para atingir estes objetivos, o modelo CJP calcula vários fatores modificados de intensidade de tensão.

Outros autores, como é o caso de Kujawski [16] e Noroozi et al. [17] propõem que a PFF não é apenas controlada pelo parâmetro  $\Delta K$ , mas também pelo parâmetro de intensidade de tensão máxima,  $K_{\text{máx}}$ , sugerindo que o uso do modelo de fecho de fenda é desnecessário [18].

Vários autores desenvolveram modelos que relacionam a velocidade de propagação,  $da/dN$ , com parâmetros não lineares na extremidade da fenda. Noroozi et al. [17] relacionaram  $da/dN$  com os campos de tensão e deformação. Zheng et al. [19] relacionaram  $da/dN$  com a energia plástica dissipada na extremidade da fenda. Antunes et al. [18], [20], [20]–[22] propuseram a substituição do parâmetro  $\Delta K$  pela gama do CTOD plástico na extremidade da fenda,  $\Delta CTOD_p$ . Com isto, o modelo passou a ser definido como  $da/dN - \Delta CTOD_p$ . Esta abordagem tem a vantagem de integrar naturalmente o fenómeno de fecho de fenda e de excluir o regime elástico que supostamente não contribui para a PFF [4].

### 3. PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste capítulo será apresentado o material usado na presente dissertação, bem como os ensaios experimentais efetuados para avaliar o comportamento elasto-plástico do material e ensaios para avaliar a velocidade de propagação de fendas de fadiga nestes materiais.

#### 3.1. Material usado

No presente estudo de propagação de fendas por fadiga foram estudadas duas situações para a liga Ti-6Al-4V, ambas obtidas pelo processo SLM (Selective Laser Melting). No primeiro caso, a liga Ti-6Al-4V foi sujeita a um tratamento designado por HIP (Hot Isostatic Pressing), e no segundo caso, o material foi sujeito a um tratamento térmico (TT) para alívio de tensões. O tratamento HIP é uma técnica que tem como principal objetivo reduzir a porosidade nos materiais. Este tratamento consiste em submeter o material a uma alta temperatura e pressão dentro de um compartimento contendo um gás inerte, que comprime o material isostaticamente [23].

O processo de fabricação aditiva SLM consiste em criar uma geometria através da fusão do pó metálico, sendo esta feita por um laser. Esta técnica é muito promissora devido ao menor tempo de projeção dos componentes, uso de materiais que não são caros, grande velocidade de produção, versatilidade dos componentes, grande exatidão no momento da conceção, capacidade de produzir componentes mais funcionais com o mesmo design e recursos intrínsecos à engenharia [24].

As ligas de titânio são caracterizadas por terem um módulo de elasticidade bastante elevado e uma densidade relativamente baixa. Por estes motivos estes materiais são bons candidatos para componentes do ramo aeroespacial. Além de aplicações aeroespaciais, as ligas de titânio também podem ser utilizadas condições com ambientes agressivos devido à sua grande resistência à corrosão. Por este motivo, o titânio puro bem como a liga Ti-6Al-4V têm sido muito usados nas aplicações tecnológicas médicas para a produção de vários tipos de ortopedia, dentária e implantes vasculares [25].

### 3.2. Ensaios experimentais

Foram feitos dois tipos de ensaios experimentais: ensaios de fadiga oligocíclica e ensaios de propagação de fendas por fadiga.

Todos os provetes foram obtidos a partir do processo SLM, camada por camada em malha inversa a 45°, usando sistemas 3D, model ProX DMP 320. O pó da liga de titânio Ti-6Al-4V (grade 23) foi usado, e tem uma composição química que é apresentada na Tabela 3.1. A densidade de energia necessária para fabricar os provetes foi de 57 J/mm<sup>3</sup> e a espessura de cada camada foi de 30 µm.

**Tabela 3.1.** Composição química do pó da liga de titânio Ti-6Al-4V [peso em percentagem]

Al	He	Fe	Y	C	V	O	N	Ti
5,5-6,5	<0,012	<0,25	<0,005	<0,08	3,5-4,5	<0,15	<0,04	Restante

O tratamento de alívio de tensões consiste no aquecimento lento e controlado a temperaturas superiores a 670°C, seguindo um período de 5 horas onde a temperatura é 670°C ± 15°C. Por fim arrefece-se o provete à temperatura ambiente do compartimento. No tratamento HIP, os provetes são submetidos a um aquecimento controlado acima de 920°C seguido de um período de 2 horas num compartimento a uma pressão de 100 MPa. Depois dos provetes terem sofrido o tratamento térmico, estes foram a um processo de polimento de modo a reduzir a rugosidade na superfície.

Os ensaios de fadiga oligocíclica foram feitos com o objetivo de obter alguns parâmetros do material Ti-6Al-4V para os dois casos apresentados no subcapítulo anterior. Foi necessário obter os parâmetros do material para ambos os casos pois esses mesmos parâmetros não se encontravam disponíveis na literatura. O processo de tratamento de dados dos ensaios de fadiga oligocíclica para obtenção dos parâmetros do material será mostrado no próximo capítulo. Os ensaios experimentais de fadiga oligocíclica foram executados usando um provete de fadiga oligocíclica (ver Figura 3.1).

À semelhança dos ensaios de fadiga oligocíclica, os ensaios de propagação de fendas por fadiga foram realizados para os diferentes pós-tratamentos do material Ti-6Al-4V. O objetivo destes ensaios é obter as curvas de velocidade de propagação de fenda em função do parâmetro  $\Delta K$  e assim compará-las com o mesmo tipo de curvas obtidas nas simulações numéricas nas mesmas condições. Os ensaios experimentais de propagação de

fenda à fadiga foram executados de acordo com a Norma ASTM E647 (2016) usando o provete CT (compact-tensions) com 6 mm de espessura (ver Figura 3.2).

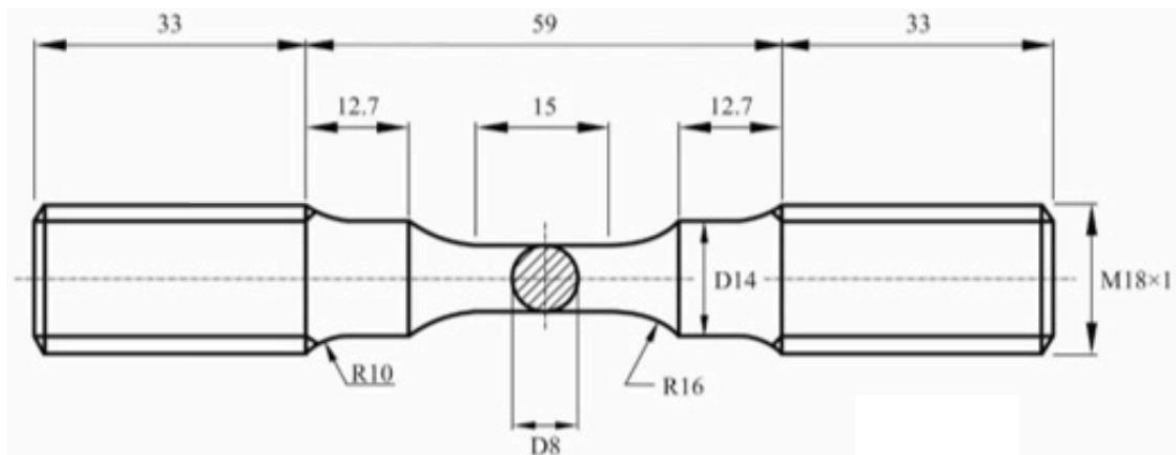


Figura 3.1. Provete de fadiga oligocíclica e as suas dimensões (mm).

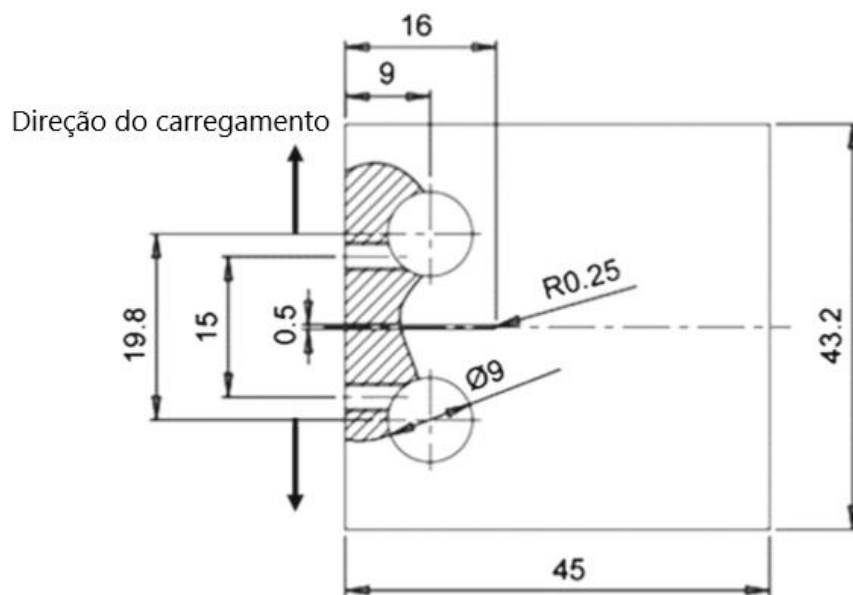
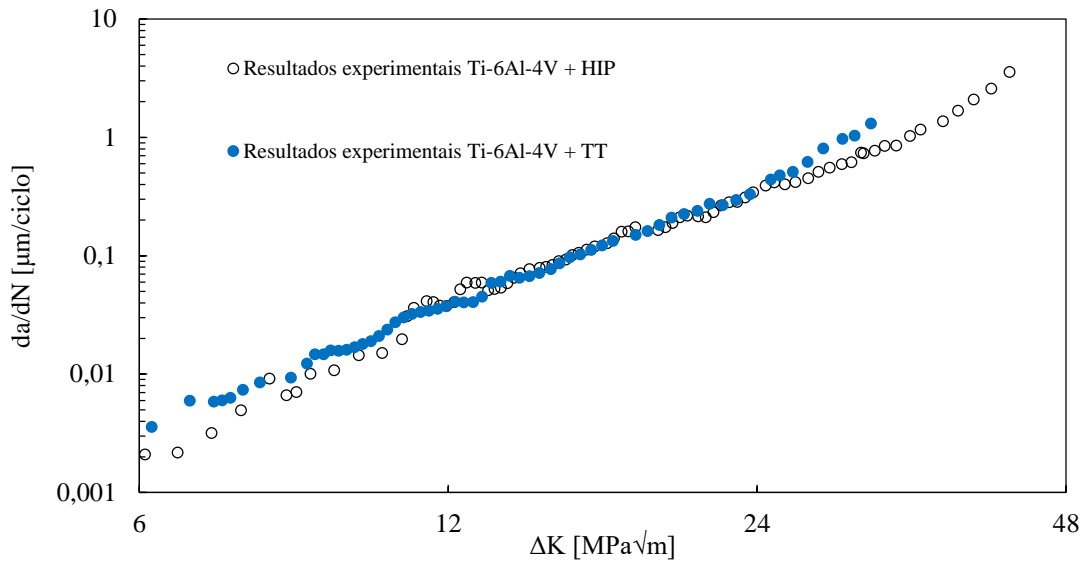


Figura 3.2. Dimensões (mm) e direções dos carregamentos do provete CT. Adaptado de [26].

Nos ensaios de propagação de fenda por fadiga, o comprimento da fenda foi medido com um *travelling microscope* (45%) com uma precisão de 10  $\mu\text{m}$ . A velocidade de propagação da fenda quando aplicada uma razão de tensão ( $R$ ) constante foi determinada por um método incremental polinomial de 5 pontos consecutivos. Na Figura 3.3 são apresentados os resultados experimentais de propagação de fenda para um  $R$

constante de 0,05, onde o carregamento máximo e mínimo é 2643 N e 132 N, respetivamente. Como se pode ver, o pós-processamento não tem grande efeito na velocidade de propagação de fendas por fadiga.



**Figura 3.3.** Curvas  $da/dN$ - $\Delta K$  experimentais do material Ti-6Al-4V para ambos os tratamentos (HIP e TT) para uma razão de tensão igual a 0,05.



## 4. MODELO CONSTITUTIVO DO MATERIAL

### 4.1. Teoria da plasticidade

A modelação elástica-plástica do material é um aspeto fundamental a ser considerado nas simulações numéricas. Um grande problema da plasticidade é que tem de ser resolvido de forma incremental. Isto deve-se ao facto, de que ao contrário do que acontece no regime elástico, a deformação plástica que ocorre no corpo está dependente do histórico do carregamento.

Em materiais dúcteis, a deformação plástica pode ser muito elevada até que se dê a rotura. Estes materiais são muito utilizados em processos de fabrico sendo esta uma das grandes áreas de aplicação da teoria da plasticidade.

Os modelos fenomenológicos elástico-plástico são constituídos por 3 componentes:

- **Critério de cedência:** Estes critérios descrevem a superfície de limite de elasticidade num espaço de tensão multidimensional;
- **Lei de encruamento:** As leis de encruamento descrevem a evolução da superfície de limite de elasticidade ao longo da deformação plástica;
- **Lei de escoamento:** Estas leis servem para estabelecer a relação entre o estado de tensão e o incremento de deformação plástica.

A equação geral de um modelo constitutivo pode ser dada por:

$$F(\sigma' - X'; \alpha; \beta) = \bar{\sigma}(\sigma' - X'; \alpha) - Y(\bar{\varepsilon}^p; \beta), \quad (4.1)$$

onde  $\bar{\sigma}(\sigma' - X'; \alpha)$  é a tensão equivalente dada pelo critério de cedência ( $\sigma'$  é o componente desviador do tensor das tensões de Cauchy;  $X'$  é o tensor desviador das tensões inversas;  $\alpha$  são os parâmetros de anisotropia), e  $Y(\bar{\varepsilon}^p; \beta)$  é a lei de encruamento que representa a evolução da superfície do critério de cedência ( $\bar{\varepsilon}^p$  é a deformação plástica equivalente;  $\beta$  são os parâmetros do material).

## 4.2. Critério de cedência

Em muitos casos a tensão de cedência é obtida a partir de ensaios de tração, sendo que nestes ensaios as solicitações são apenas uniaxiais. Porém, na realidade, a maioria das solicitações presentes nos corpos são maioritariamente solicitações biaxiais e triaxiais. Por este motivo são necessários modelos que permitam representar a superfície limite de elasticidade em função das tensões. Estes critérios permitem identificar a fronteira entre os diferentes estados do material (estado elástico e estado plástico) para qualquer solicitação.

Os critérios de cedência podem ser divididos em dois grandes grupos: critérios de cedência isotrópicos e critérios de cedência anisotrópicos. Os critérios de cedência isotrópicos são aqueles que são desenvolvidos para descrever a superfície de limite de elasticidade apenas para materiais isotrópicos. Um material é chamado isotrópico quando as suas propriedades mecânicas se mantêm inalteradas independentemente da direção. Alguns dos critérios de cedência isotrópicos são por exemplo: Tresca [27], von Mises [28]. Os critérios de cedência anisotrópicos são concebidos para descreverem a superfície de limite de elasticidade para materiais anisotrópicos. Um material anisotrópico é aquele em que as suas propriedades mecânicas se alteram em função da direção. Um exemplo deste tipo de critério de cedência é o Hill'48 [29].

### 4.2.1. Critério de cedência isotrópicos

Neste subcapítulo serão apresentados em síntese os critérios de Tresca e von Mises pois são estes os mais utilizados nos materiais metálicos.

A deformação plástica de metais ocorre pelo escorregamento de uma parte dos cristais em relação à outra, sendo que esse escorregamento se deve à tensão de corte. Assim, o critério de Tresca propõe que a passagem da deformação elástica para a deformação plástica é baseada na tensão de corte máxima. O critério de Tresca propõe que a deformação plástica se inicia quando o valor de tensão de corte máxima atinge um determinado valor crítico.

A equação 4.2 apresenta a formulação matemática do critério de Tresca:

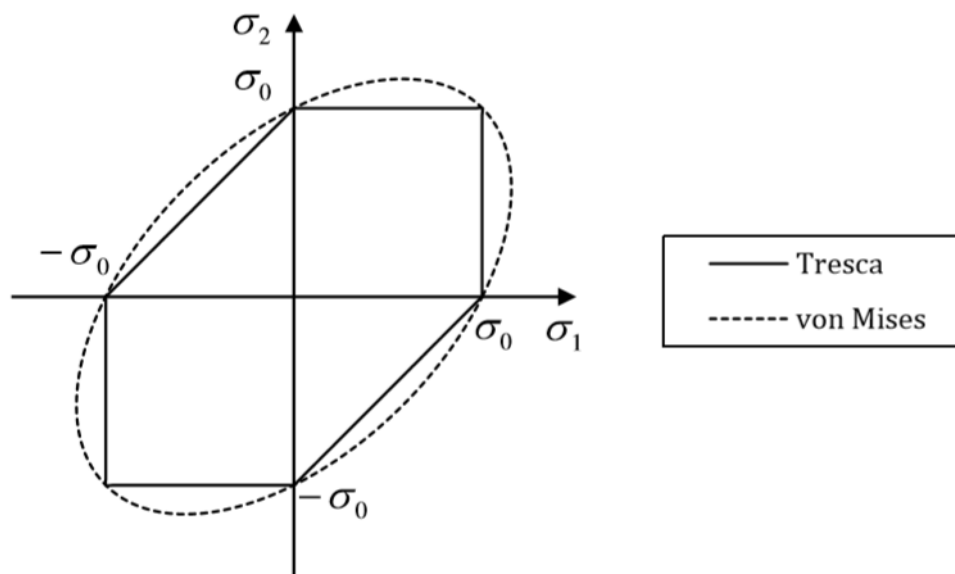
$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = 2\tau_0 = \sigma_0, \quad (4.2)$$

onde  $\sigma_I$  e  $\sigma_{III}$  são as tensões principais máxima e mínima, respetivamente,  $\sigma_0$  é a tensão uniaxial máxima e  $\tau_0$  é a tensão de corte máxima.

O critério de von Mises diz que a deformação plástica se inicia quando é ultrapassado um valor crítico de energia de distorção. Este critério tem uma grande vantagem em relação ao critério de Tresca. A vantagem reside na forma das superfícies de limite de elasticidade. No caso do critério de Tresca a superfície de limite de elasticidade é um prisma hexagonal, enquanto que no critério de von Mises a superfície de limite de elasticidade é um cilindro (ver Figura 4.1). Isto torna o critério de von Mises mais apetecível matematicamente. Uma diferença importante entre estes dois critérios é o facto que o critério de Tresca é mais conservativo que o critério de von Mises. Isto pode ser observado na Figura 4.1, em que a superfície de Tresca está completamente envolvida pela superfície de von Mises. A equação 4.3 representa a fronteira entre os diferentes domínios (domínio elástico e domínio plástico) em função das tensões principais, segundo o critério de von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_0^2, \quad (4.3)$$

onde  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são tensões principais e  $\sigma_0$  é a tensão uniaxial máxima.



**Figura 4.1.** Representação das superfícies limites de elasticidade dos critérios de cedência von Mises e Tresca no plano  $(\sigma_1, \sigma_2)$  [30]

### 4.2.2. Critérios de cedência anisotrópicos

Em muitos materiais as propriedades físicas alteram-se em função da direção. Isto deve-se às diferentes orientações que os grãos se encontram entre si, tornando assim o material anisotrópico. Por haver materiais anisotrópicos torna-se necessário desenvolver modelos que levem em conta a anisotropia presente num material.

Um critério de cedência muito utilizado para materiais anisotrópicos é o Hill'48. O critério de Hill'48 deriva do critério de von Mises sendo que a diferença reside no facto que o critério de Hill'48 tem adicionado parâmetros de anisotropia. De seguida é apresentada a equação de uma superfície de limite de elasticidade genérica segundo o critério de Hill'48:

$$F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = Y^2, \quad (4.4)$$

onde  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  são componentes do tensor de tensão de Cauchy, F, G, H, L, M, N são parâmetros de anisotropia e Y é a tensão de cedência.

Os parâmetros de anisotropia permitem quantificar o grau de anisotropia numa determinada direção através do coeficiente de anisotropia ( $r$ ). Os parâmetros de anisotropias são obtidos experimentalmente. A equação seguinte apresenta a fórmula para calcular o coeficiente de anisotropia para uma certa direção,  $\alpha$ . Os parâmetros de anisotropias são obtidos experimentalmente.

$$r(\alpha) = \frac{H - (2N - F - G - 4G) \times \sin^2(\alpha) \times \cos^2(\alpha)}{F \times \sin^2(\alpha) + G \times \cos^2(\alpha)} \quad (4.5)$$

A vantagem de usar o critério de Hill'48 em vez de outros mais complexos é a simplicidade, na formulação e implementação em códigos de simulações numéricas. Além disso, o número baixo de testes experimentais necessários para identificar os parâmetros de anisotropia é muito conveniente para os laboratórios da indústria [30].

### 4.3. Lei de encruamento

Considerando um sólido que é carregado até sofrer deformação plástica, e depois é descarregado e carregado novamente induzindo novamente deformação plástica, quando isto acontece, a tensão de cedência irá alterar-se. Este fenómeno é designado por encruamento. Quando a tensão de cedência é ultrapassada, são as leis de encruamento que controlam a evolução da superfície de limite de elasticidade em tamanho, posição e forma. Existe dois grandes tipos de encruamento que governam a superfície de limite elasticidade: encruamento isotrópico e encruamento cinemático. Existem outras leis de encruamento que são híbridas destas duas anteriores.

#### 4.3.1. Encruamento isotrópico

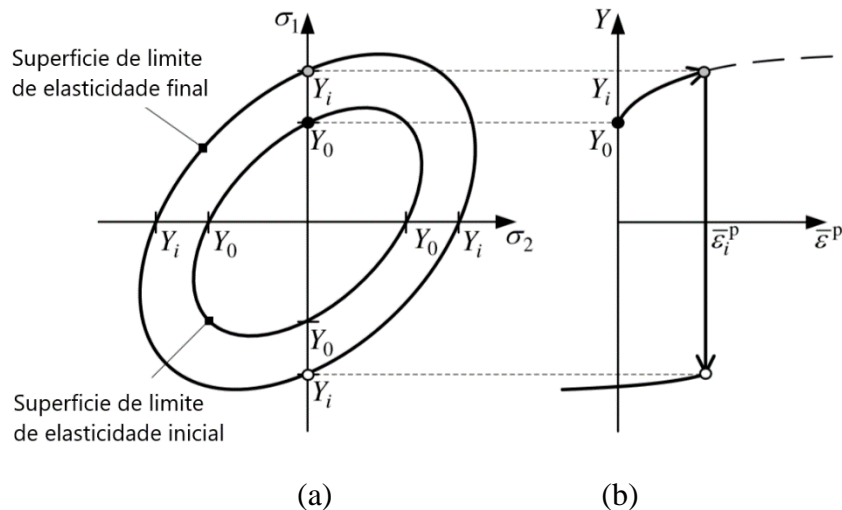
O encruamento isotrópico consiste na expansão da superfície de limite de elasticidade mantendo a sua posição e forma inicial (ver Figura 4.2). Vários modelos de encruamento isotrópico foram propostos ao longo dos tempos como por exemplo: Hollomon [31], Swift [32], Ludwick [33], Ludwigson [34], Ghosh [35] e Fernandes et al. [36]. De notar que os modelos de encruamento isotrópico não levam em conta o efeito de Bauschinger. O efeito de Bauschinger consiste na redução da tensão de cedência à compressão depois de um carregamento de tração, ou vice-versa [37]. Este efeito é importante pois permite mostrar que o histórico da deformação é relevante para o comportamento plástico que se seguirá.

Contudo existe um fenómeno que acontece em alguns materiais, como por exemplo o alumínio e as ligas de cobre, que é designado por tensão de saturação. Por este motivo é necessário desenvolver modelos de encruamento isotrópico que levassem em conta o fenómeno de tensão de saturação. Alguns modelos que visam preencher a lacuna do efeito de tensão de saturação, são por exemplo Voce [38] e Hockett & Sherby [39]. Na Tabela 4.1 encontra-se listadas as equações dos modelos de encruamento isotrópico mais usuais.

**Tabela 4.1.** Equações de modelos de encruamento isotrópico

Modelos	Equações
Hollomon	$Y = K \times (\bar{\varepsilon}^p)^n$
Swift	$Y = K \times (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n$
Ludwick	$Y = Y_0 + K \times (\bar{\varepsilon}^p)^n$
Ludwigson	$Y = K \times (\bar{\varepsilon}^p)^n + \exp(K_1 + n_1 \times \bar{\varepsilon}^p)$
Ghosh	$Y = C + K(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}^p)^n$
Fernandes et al.	$Y = K \times [g \times (\varepsilon_0 + \varepsilon_p) + h \times \bar{\varepsilon}^p]^n$
Voce	$Y = Y_0 + (Y_{sat} - Y_0) \times [1 - \exp(-C_Y \times (\bar{\varepsilon}^p)^a)]$
Hockett & Sherby	$Y = Y_0 + (Y_{sat} - Y_0) \times [1 - \exp(-C_Y \times (\bar{\varepsilon}^p)^a)]$

onde  $K$ ,  $n$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $Y_0$ ,  $K_1$ ,  $n_1$ ,  $C$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $Y_{sat}$ ,  $C_Y$  e  $a$  são parâmetros do material.

**Figura 4.2.** (a) Evolução da superfície de limite de elasticidade no plano  $(\sigma_1, \sigma_2)$  segundo o encruamento isotrópico, (b) a correspondente curva de tensão vs deformação plástica. Adaptado de [30]

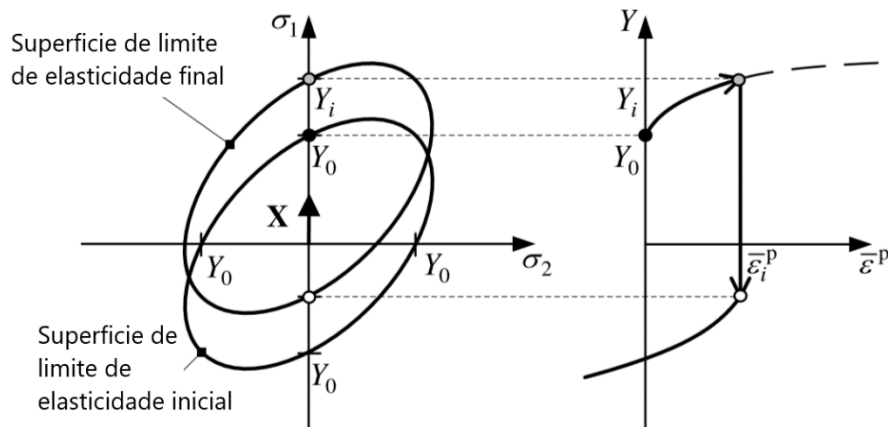
### 4.3.2. Encruamento cinemático

O encruamento cinemático consiste na translação rígida da superfície de limite de elasticidade. Os modelos de encruamento cinemático têm em conta o efeito de Bauschinger. Como já foi dito anteriormente, o efeito de Bauschinger é importante para mostrar a importância do histórico da deformação plástica.

Existem vários tipos de modelos de encruamento cinemático tais como os modelos lineares e os modelos não lineares. Dos modelos lineares destacam-se Prager [40] e Ziegler [41] enquanto que para os modelos não lineares destaca-se Armstrong-Frederick [42]. Na Tabela 4.2 estão listadas as equações dos modelos de encruamento cinemático mais usuais.

**Tabela 4.2.** Equações de modelos de encruamento cinemático

Modelos	Equações	Parâmetros
Prager	$dX' = q_p \times d\bar{\varepsilon}^p$	$q_p$ é um parâmetro do material
Ziegler	$dX' = q_z \times d\bar{\varepsilon}^p \times (\sigma' - X')$	$q_z$ é um parâmetro do material
Armstrong-Frederich	$dX' = C_x \times \left[ \frac{X_{Sat}}{\bar{\sigma}} \times (\bar{\sigma} - X') - X' \right] \times d\bar{\varepsilon}^p$	$C_x$ e $X_{Sat}$ são parâmetros do material



**Figura 4.3.** À esquerda encontra-se representada a evolução da superfície de limite de elasticidade no plano  $(\sigma_1, \sigma_2)$  segundo o encruamento cinemático, e à direita a correspondente curva de tensão vs deformação plástica. Adaptado de [30]

#### 4.4. Calibração dos parâmetros do material

Para se fazer uso de um modelo constitutivo é necessário conhecer alguns parâmetros dos materiais. Devido ao facto de nem todos os parâmetros estarem disponíveis na literatura foi necessário efetuar ensaios de fadiga oligocíclica. Os ensaios foram realizados para ambos os pós-tratamentos estudados, nomeadamente: quando a liga de titânio foi sujeita ao tratamento HIP; quando o material foi sujeito a tratamento térmico para alívio de tensões, TT.

O comportamento elástico em ambos os casos pode ser descrito pela lei de Hook visto que ambos apresentam comportamento linear elástico. Assim, o módulo de elasticidade,  $E$ , e coeficiente de Poisson,  $\nu$ , são iguais em ambos os casos, tendo como valores: 115 GPa e 0,33, respetivamente. O critério de cedência utilizado em ambos os casos foi o critério de von Mises. A lei de encruamento isotrópica é descrita pela lei de Swift. A parte de encruamento cinemático é descrita pela lei de Armstrong-Frederich.

Os parâmetros das leis de encruamento mencionadas acima foram calibrados usando curvas tensão-deformação experimentais de fadiga oligocíclica. Para se proceder à calibração dos parâmetros dos materiais utilizou-se uma função de minimização de mínimos quadrados  $F(A)$ :



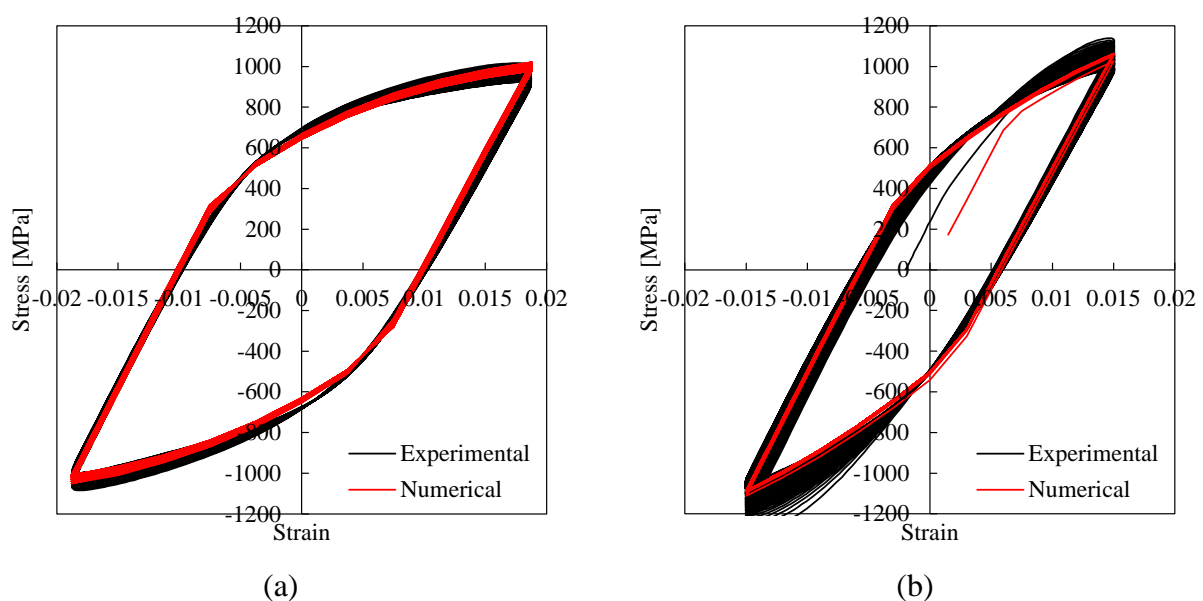
$$F(A) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\sigma^{\text{Fit}} - \sigma_{\text{Exp}}}{\sigma_{\text{Exp}}} \right]_i^2 \quad (4.6)$$

onde  $\sigma^{\text{Fit}}$  é a tensão obtida pelo modelo e  $\sigma_{\text{Exp}}$  é a tensão obtida pelos ensaios experimentais de fadiga oligocíclica.

A minimização da função  $F(A)$  foi feita com a ferramenta solver do programa Microsoft Excel. Os parâmetros dos materiais que foram obtidos a partir da abordagem anterior encontram-se listados na Tabela 4.3. Na Figura 4.4 é possível observar que há um bom ajustamento dos modelos aos ensaios experimentais de fadiga oligocíclica.

**Tabela 4.3.** Parâmetros das leis de encruamento (Swift e Armstrong-Frederich) para dois casos estudados da liga de titânio Ti-6Al-4V

Material	$Y_0$ [MPa]	$K$ [MPa]	$n$	$C_x$	$X_{\text{Sat}}$ [MPa]
Ti-6Al-4V + HIP	823,5	707,1	-0,029	104,3	402,0
Ti-6Al-4V + TT	700,0	738,6	-0,013	88,1	585,2



**Figura 4.4.** Comparação entre as curvas cíclicas tensão-deformação experimentais e numéricas: (a) Ti-6Al-4V com tratamento HIP; (b) Ti-6Al-4V com TT.

---

## 5. MODELO NUMÉRICO DO ENSAIO MECÂNICO

### 5.1. Programa de elementos finitos

As simulações numéricas da propagação da fenda à fadiga foram feitas com o programa de elementos finitos DD3IMP, que foi inicialmente desenvolvido para simular processos de estampagem de chapas metálicas [43].

A informação de entrada é fornecida através de “ficheiros de entrada”. De seguida é apresentada uma lista de “ficheiros de entrada” e a sua respetiva informação de entrada.

- **DD3\_mesh.dat:** Este ficheiro serve para definir a malha de elementos finitos do provete;
- **DD3\_materX.dat:** Este ficheiro serve para introduzir diferentes parâmetros das leis constitutivas do material (modulo de Young, tensão de cedência, parâmetros das leis de encruamento, etc.);
- **DD3\_phase.dat:** Este ficheiro tem como função caracterizar o carregamento. Uma vez que o carregamento é definido por incrementos de força, é necessário ter mais do que um ficheiro deste tipo quando se quer estudar a PFF, mesmo quando a amplitude de carga é constante;
- **DD3\_bcon.dat:** Este ficheiro tem como função impor as condições de fronteira no provete;
- **DD3\_input.dat:** Contem todos os parâmetros numéricos, como o critério de convergência, número máximo de iterações, etc;
- **DD3oCYCLIC.dat:** Este ficheiro tem como objetivo escolher o critério de propagação a ser utilizado na simulação numérica, bem como o valor crítico da deformação plástica;

Os resultados são obtidos através de “ficheiros saída”. De seguida é apresentada uma lista de “ficheiros de saída”.

- **R\_Line1\_CTOD.DD3:** Este ficheiro apresenta o valor do CTOD a um nó de distância da extremidade da fenda;
- **R\_Line2\_CTOD.DD3:** Este ficheiro apresenta o valor do CTOD a dois nós de distância da extremidade da fenda;
- **R\_NODESreleased.DD3:** Este ficheiro apresenta uma lista de todas as propagações que ocorreram ao longo da simulação. Em cada propagação é apresentado o ciclo em que se deu a propagação bem como a deformação plástica em ambos os nós presentes na extremidade da fenda;
- **R\_TIP.DD3:** Este ficheiro apresenta a informação de tensões e deformações no nó da extremidade da fenda (vai sendo alterado devido à propagação) em todos os incrementos da simulação;
- **ToolBCIDx.res** e **ToolBCIDy.res:** Apresenta deslocamentos e forças na zona do furo;
- **Tool\_Sym.res:** Por vezes poderá ocorrer o contacto dos flancos da fenda. Assim este ficheiro apresenta a força de contacto que é sentida nos flancos da fenda.

## 5.2. Modelo de elementos finitos

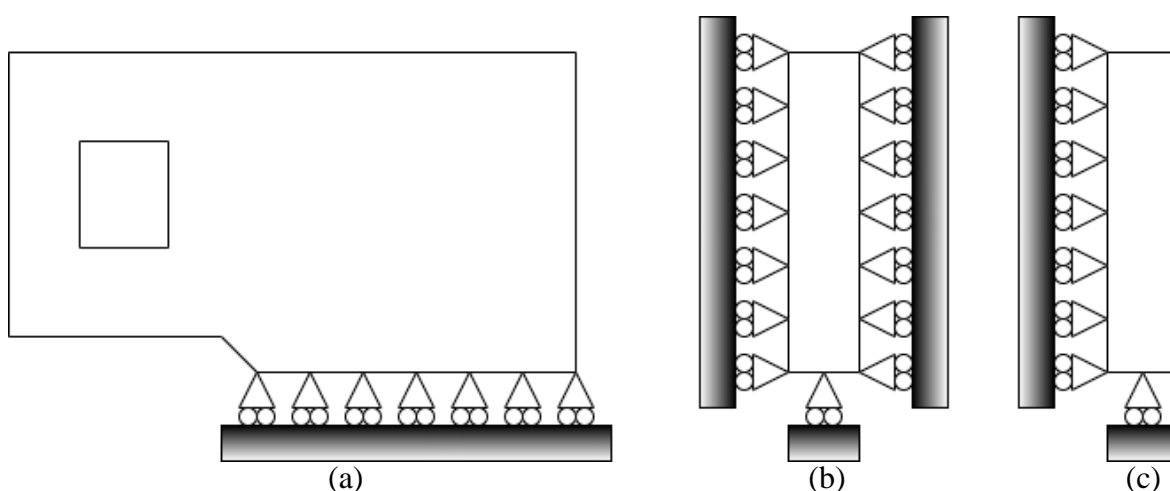
Um bom modelo numérico é aquele que é mais simples e que ao mesmo tempo não compromete os resultados. Deste modo obtêm-se resultados precisos minimizando o custo computacional.

Tendo em conta que o provete apresenta um plano de simetria relativamente ao plano da fenda, simulou-se apenas a parte de cima do provete. Para modelar o contacto dos flancos da fenda aquando do descarregamento estabeleceu-se que o plano de simetria da fenda funcionaria como um plano rígido, evitando assim a transposição entre os flancos.

### 5.2.1. Condições de fronteira

As condições de fronteira são condições que são sabidas à partida no início da modelação. Todos os sistemas para estarem devidamente caracterizados devem ter um certo número de condições de fronteira.

Cada caso de PFF, estudado na presente dissertação, foi estudado para duas condições de fronteira distintas: estado plano de deformação (DP) e estado plano de tensão (TP). Estas condições de fronteira têm como principal objetivo passar o modelo de um problema 3D para um problema 2D. Foi necessário o estudo de ambas pois não é evidente qual das condições de simplificação se encontra mais próxima da realidade. Na Figura 5.1 encontram-se, de forma esquemática, as condições de fronteira utilizadas nos modelos numéricos.

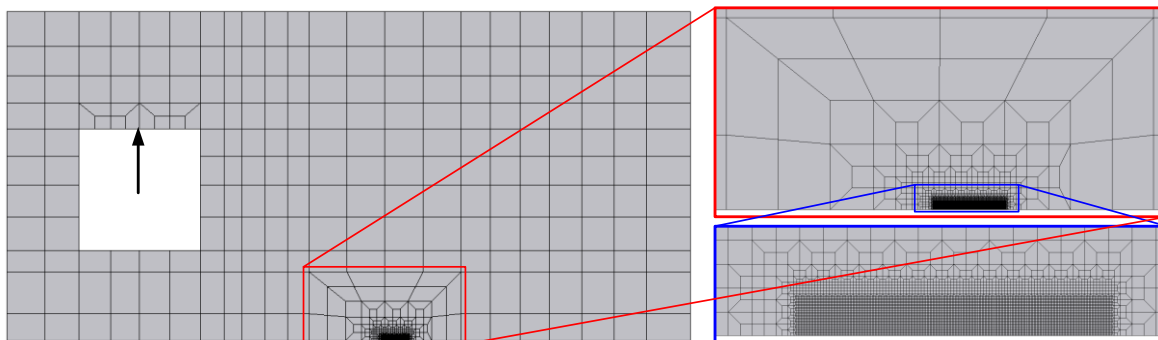


**Figura 5.1.** Representação esquemática do modelo do provete CT (a). Condições de fronteira: (b) estado plano de deformação (DP); e (c) estado plano de tensão (TP).

### 5.2.2. Discretização do provete

A escolha criteriosa da malha de elementos finitos para cada modelo é essencial para uma maior precisão nos resultados obtidos, bem como a diminuição do esforço computacional. Em todas as malhas usadas nos modelos numéricos da presente dissertação, na zona mais próxima da fenda usou-se uma malha refinada (elementos quadrados com  $8 \times 8 \mu\text{m}^2$ ) e no restante provete usou-se uma malha mais grosseira. A zona refinada permite fazer uma avaliação com precisão dos gradientes de tensão enquanto que a zona mais grosseira permite reduzir o custo computacional substancialmente. Cada malha é constituída por aproximadamente 7200 elementos hexaédricos lineares. Foi apenas usada uma camada de elementos na direção da espessura visto que nos modelos numéricos são adotadas as condições de estado plano de tensão (TP) ou estado plano de deformação (DP). Além disso, a espessura do elemento foi drasticamente reduzida ( $t = 0,1\text{mm}$ ) para que seja possível obter-se a condição de estado plano de tensão [44]. De notar que a geometria do

furo é diferente do modelo numérico. Isto deve-se ao facto de se querer simplificar a geração da malha, sem consequências para os resultados obtidos.



**Figura 5.2.** Ilustração da malha no provete CT (parte de cima). Inclui ainda a ampliação da zona da fenda na qual a malha é mais refinada.

### 5.2.3. Critérios de propagação da fenda

É espectável que a velocidade de propagação de fenda à fadiga tenha valores muito baixos, o que torna inviável computacionalmente simular uma propagação completa de uma fenda à fadiga, necessitando de milhares de ciclos de carga. Para contornar este problema simularam-se algumas pequenas propagações em diferentes comprimentos de fenda. Os comprimentos de fenda iniciais utilizados na presente dissertação foram: 7 mm, 10 mm, 13 mm, 16 mm, 19 mm, 22 mm e 24 mm. A malha foi adaptada para cada comprimento de fenda inicial de modo a que a zona de fenda tenha a malha mais refinada.

Visto que se está perante elementos finitos, a propagação de fenda por fadiga não será contínua. A propagação da fenda será feita com a libertação de nós presentes no plano de simetria do provete quando se verificarem as condições de um certo critério de propagação.

Foram estudados dois critérios de PFF. Ambos os critérios baseiam-se na deformação plástica como principal mecanismo de propagação. Para isso é necessário obter a deformação plástica na extremidade da fenda, sendo que a extremidade da fenda se localiza num nó. Contudo a deformação plástica é avaliada nos pontos de Gauss. Por esta razão a deformação plástica na extremidade da fenda é calculada através da média dos pontos de Gauss mais próximos do nó. Além disso, é importante notar que as libertações dos nós ocorre sempre no instante de carga mínima.

Os critérios de PFF estudados foram: *Incremental Plastic Strain* (IPS) e o *Total Plastic Strain* (TPS). No critério IPS, os nós da extremidade da fenda são libertados

quando o incremento de deformação plástica,  $\Delta\varepsilon^P$ , atinge um valor crítico. O incremento de deformação plástica é calculado através da diferença entre a deformação plástica no momento da avaliação e a deformação plástica na propagação anterior. No critério TPS, os nós da extremidade da fenda são libertados quando se atinge um valor crítico de deformação plástica,  $\varepsilon^P$ . Ambos os critérios apenas necessitam de um parâmetro (incremento de deformação plástica para o critério IPS e deformação plástica total para o critério TPS), o que simplifica o uso.

#### **5.2.4. Carregamentos aplicados**

O carregamento cíclico foi aplicado apenas num ponto do furo do provete (Figura 5.2) por uma razão de simplificação. Como já foi dito anteriormente, o modelo numérico tem uma espessura de 0,1 mm enquanto que o provete tem 6 mm de espessura. Por esta razão é necessário dividir os valores das cargas experimentais por 60 para se obter os valores das cargas a utilizar no modelo numérico. Apesar de terem sido utilizados diversos espectros de carga (amplitude constante, sobrecargas, cargas com blocos de diferentes amplitudes) a forma do carregamento permaneceu sempre do mesmo tipo (forma triangular com um período de 2 segundos (carga e descarga)).

## 6. RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos. Numa primeira fase, será feita uma calibração dos parâmetros dos critérios de propagação para os diferentes casos estudados. Depois disto, serão apresentados os resultados numéricos de PFF para as situações de amplitude de carga constante. Além disso, para a situação de amplitude de carga constante será feita uma avaliação do limiar de fadiga. Os casos estudados de amplitude de carga constante foram executados tendo em conta ambos os materiais (Ti-6Al-4V + HIP e Ti-6Al-4V + TT). Após o estudo de situações com amplitude de carga constante serão apresentados os resultados para sobrecargas e amplitudes de carga variável por blocos, em que nestes casos o material usado foi apenas o Ti-6Al-4V + HIP.

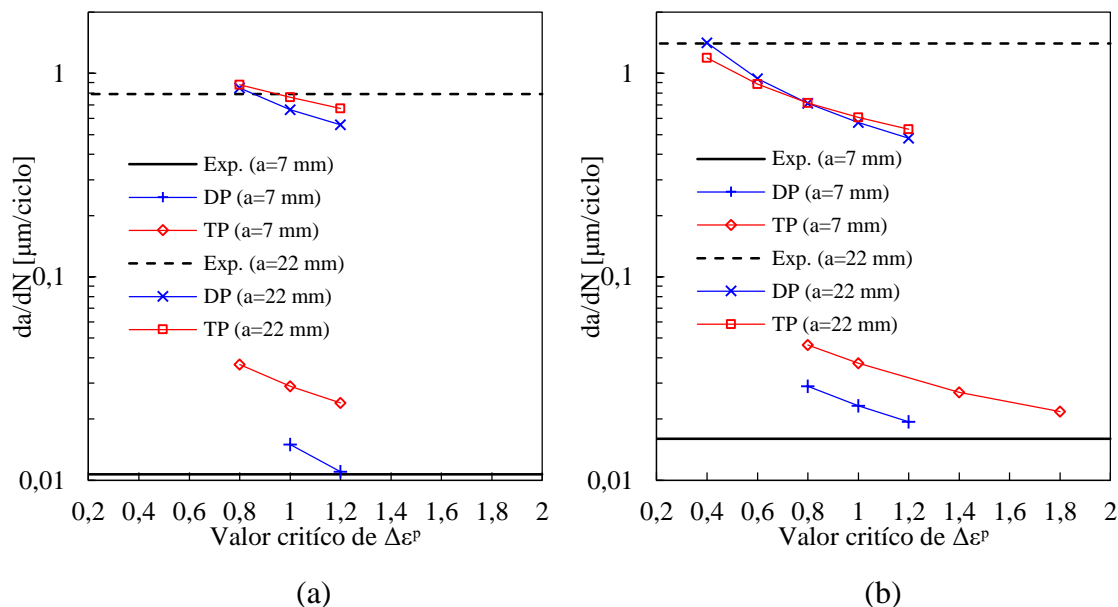
### 6.1. Amplitude de carga constante

#### 6.1.1. Calibração dos parâmetros do material

Primeiramente, começou-se por calibrar os parâmetros dos critérios de propagação IPS e TPS. Começou-se por calibrar o parâmetro referente ao critério de propagação IPS (valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$ ). Sabendo que o valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$  seria diferente para as diferentes condições ao longo da propagação de fenda, houve a necessidade de estudar a velocidade de PFF para vários valores críticos de  $\Delta\varepsilon^P$ . Assim o valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$  foi avaliado para diferentes comprimentos de fenda, diferentes condições de fronteira e diferentes materiais. O valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$  foi avaliado em dois comprimentos de fenda ( $a=7$  mm e  $a=22$  mm). As condições de fronteira usadas na avaliação do valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$  foram: estado plano de deformação (DP) e estado plano de tensão (TP). Como o material influencia o comportamento mecânico do material é necessário estudar o valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$  para ambos os materiais (Ti-6Al-4V +HIP e Ti-6Al-4V + TT).

A determinação do valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$  para cada caso avaliado é determinado, fazendo a comparação entre a velocidade PFF experimental e a velocidade obtida numericamente. No caso do estudo da previsão de PFF utilizando o critério IPS, por questões de eficiência computacional foi necessário recorrer a interpolações e

extrapolações lineares para se obter o valor crítico de  $\Delta\varepsilon^P$  para cada caso. Na Figura 6.1 é possível observar os vários valores de  $\Delta\varepsilon^P$  arbitrados e a velocidade de propagação obtida através destes modelos, bem como a velocidade experimental para  $a=7$  mm e  $a=22$  mm para ambos os materiais.



**Figura 6.1.** Calibração dos valores críticos de  $\Delta\varepsilon^P$  do critério de propagação IPS para os diferentes comprimentos de fenda comparando as condições de fronteira (DP e TP): (a) Material: Ti-6Al-4V + HIP; (b) Material Ti-6Al-4V + TT.

Na Tabela 6.1 são apresentados os valores críticos de  $\Delta\varepsilon^P$  para o critério IPS, para ambas as condições de fronteira, diferentes comprimentos e ambos os materiais.

**Tabela 6.1.** Valores críticos de  $\Delta\varepsilon^P$  do critério de propagação de fenda à fadiga IPS, para as várias situações estudadas.

Material	Estado plano de deformação		Estado plano de tensão	
	a=7 mm	a=22 mm	a=7 mm	a=22 mm
Ti-6Al-4V + HIP	1,215	0,859	1,533	0,958
Ti-6Al-4V + TT	1,254	0,406	2,233	0,266

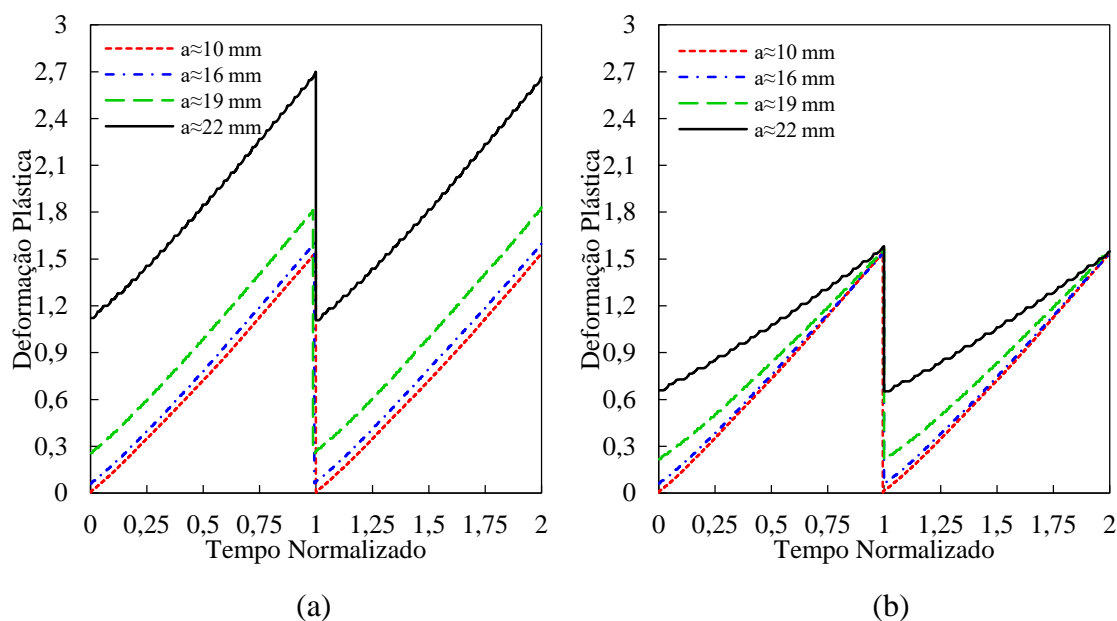
Na Tabela 6.2 são apresentados os valores críticos de  $\varepsilon^P$  para o critério TPS, para ambas as condições de fronteira e ambos os materiais.



**Tabela 6.2.** Valores críticos de  $\epsilon^P$  do critério de propagação de fenda à fadiga TPS, para as várias situações estudadas.

Material	Estado plano de deformação	Estado de tensão plana
	a=7 mm	a=7 mm
Ti-6Al-4V + HIP	1,215	1,533
Ti-6Al-4V + TT	1,254	2,233

A calibração do parâmetro para o critério de propagação TPS não foi necessária pois foram utilizados alguns valores do parâmetro do critério IPS obtidos anteriormente. Os valores críticos de  $\Delta\epsilon^P$  obtidos para o critério de propagação IPS e utilizados no critério TPS foram aqueles obtidos tendo em conta o comprimento de fenda igual a 7 mm. A razão pela qual se utilizou a=7 mm, em vez de a=22 mm, deve-se ao facto da zona de deformação plástica ser muito pequena para comprimentos de fenda baixos (a=7 mm) e por essa razão a diferença entre os critérios de propagação é praticamente nula. Ao aumentar o comprimento de fenda, a zona de deformação plástica vai aumentando e portanto a deformação plástica no início de cada propagação nodal não será zero (ver Figura 6.2). A evolução da deformação plástica na extremidade da fenda é apresentada na Figura 6.2, considerando o estado plano de tensão na análise numérica do Ti-6Al-4V com HIP, comparando os dois critérios de propagação (IPS e TPS). Apesar de serem apresentadas apenas duas propagações nodais, são avaliados diferentes valores do comprimento inicial da fenda, variando de  $a_0 = 10$  mm até  $a_0 = 22$  mm. Considerando o menor comprimento inicial de fenda ( $a_0 = 10$  mm), as previsões obtidas a partir de diferentes critérios de propagação de fenda são idênticas (compare a Figura 6.2 (a) e a Figura 6.2 (b)). No entanto, o impacto do critério de propagação na evolução deformação plástica é significativa para o maior comprimento inicial de fenda ( $a_0 = 22$  mm). Considerando o critério de propagação de fenda IPS, o nó da extremidade da fenda é libertado quando o incremento da deformação plástica (desde a libertação anterior) atinge o valor crítico ( $\Delta\epsilon^P = 1,533$ ), como mostra a Figura 6.2 (a). Por outro lado, usando o critério de propagação de fenda TPS, o nó da extremidade da fenda é libertado quando a deformação plástica total atinge o valor crítico ( $\epsilon^P = 1,533$ ), como mostra a Figura 6.2 (b).



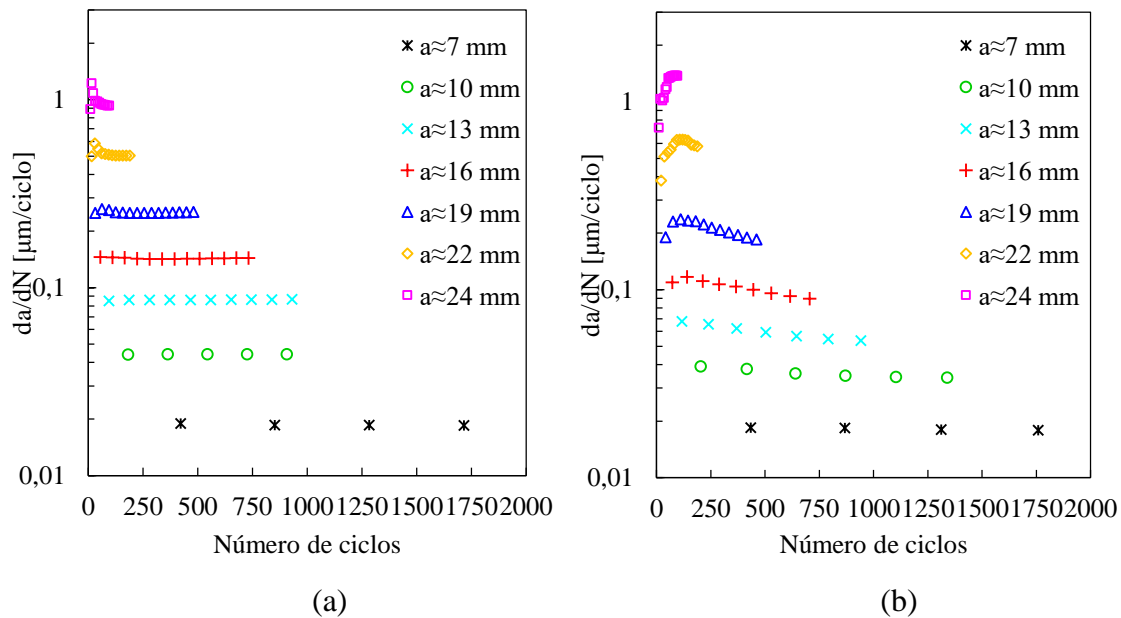
**Figura 6.2.** Evolução da deformação plástica na extremidade da fenda ao longo de duas propagações nodais considerando o estado plano de tensão (TP) para diferentes comprimentos de fenda no material Ti-6Al-4V + HIP: (a) critério de propagação IPS; (b) critério de propagação TPS.

### 6.1.2. Estabilização da zona plástica

Como já foi dito anteriormente, os valores críticos dos critérios de propagação são obtidos comparando a velocidade obtida experimentalmente e velocidade obtida numericamente. A previsão numérica da velocidade de PFF apresenta um regime transiente no início da propagação. Isto está relacionado com a estabilização da zona plástica cíclica e com a formação da onda plástica residual que provoca fecho de fenda [44]. Para que a velocidade de propagação obtida numericamente para cada comprimento de fenda seja confiável é necessário fazer algumas propagações até que a velocidade estabilize. Nesta secção irá ser estudado de que modo o comprimento inicial de fenda e as condições de fronteira influenciam a estabilização da zona plástica.

O estudo de estabilização da velocidade de PFF para o material Ti-6Al-4V + HIP foi feito com o critério de propagação TPS para as condições de fronteira DP e TP, e

para diferentes comprimentos de fenda. Os resultados obtidos para estabilização da velocidade de PFF encontram-se na Figura 6.3.



**Figura 6.3.** Previsão da velocidade de PFF em função do número de ciclos para os diferentes comprimentos de fenda no material Ti-6Al-4V + TT: (a) estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico de  $\epsilon^P=1,254$ ; (b) estado de plano de tensão (TP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico de  $\epsilon^P=2,233$ .

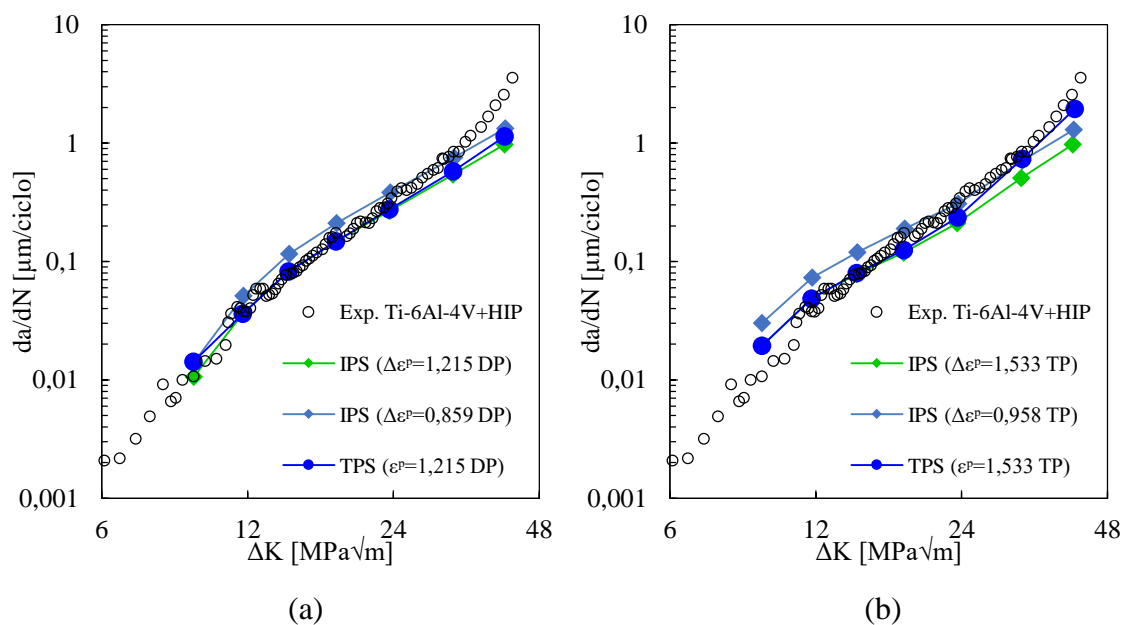
Como se pode observar pela Figura 6.3, a velocidade de PFF é superior para comprimentos de fenda maiores, o que leva à diminuição do número de ciclos entre propagações. Por essa razão, as propagações simuladas para um comprimento inicial de fenda de 24 mm são superiores a 100  $\mu\text{m}$ , enquanto se a propagação for simulada para um comprimento igual a 7 mm, o comprimento de propagação não será superior a 35  $\mu\text{m}$ . A estabilização da velocidade de PFF acontece mais lentamente quando se admite estado plano de tensão (TP) do que no estado plano de deformação (DP). A estabilização da velocidade de propagação está relacionado com o fenómeno de fecho de fenda o que afeta a carga efetiva. Este fenómeno é mais relevante no estado plano de tensão (TP), o que explica uma estabilização mais lenta. Como se pode observar pela Figura 6.3, existem mais propagações nos comprimentos de fenda superiores. Isto deve-se à zona de deformação plástica ser superior para valores de comprimento de fenda maiores, sendo por isso necessário mais propagações para que a velocidade de propagação estabilize.

### 6.1.3. Velocidade de propagação da fenda

Nesta secção serão apresentadas as curvas  $da/dN - \Delta K$  obtidas numericamente para ambos os materiais (Ti-6Al-4V + HIP e Ti-6Al-4V +TT), para ambas as condições de fronteira (DP e TP) e ambos os critérios de propagação (IPS e TPS).

Depois de se terem obtido os parâmetros dos critérios de propagação, traçaram-se as curvas  $da/dN - \Delta K$  numéricas para todos os parâmetros dos critérios de propagação obtidos anteriormente. Para se traçarem estas curvas obteve-se a velocidade de propagação para diferentes comprimentos de fenda quando esta já se encontrava estável. Os comprimentos de fenda utilizados foram:  $a=7$  mm,  $a=10$  mm,  $a=13$  mm,  $a=16$  mm,  $a=19$  mm,  $a=22$  mm,  $a=24$  mm.

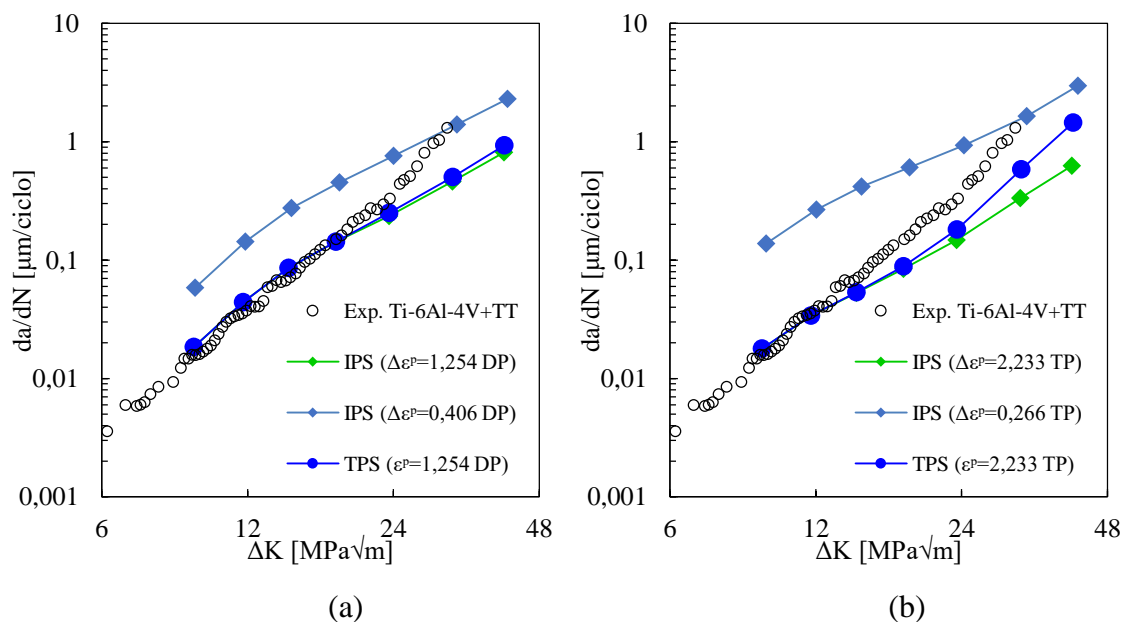
Na Figura 6.4 são apresentadas as curvas  $da/dN - \Delta K$  experimentais e numéricas para o material Ti-6Al-4V + HIP, para ambas as condições de fronteira (DP e TP) e para ambos os critérios de propagação de fenda (IPS e TPS).



**Figura 6.4.** Comparação entre as curvas  $da/dN - \Delta K$  experimentais e numéricas para o material Ti-6Al-4V + HIP: (a) Previsão da velocidade de propagação considerando estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação IPS e TPS; (b) Previsão da velocidade de propagação considerando o estado plano de tensão (TP) usando os critérios de propagação IPS e TPS.

Como se observa na Figura 6.4, os resultados numéricos referentes ao material Ti-6Al-4V + HIP estão bastante próximos da curva  $da/dN - \Delta K$  experimental. Observando

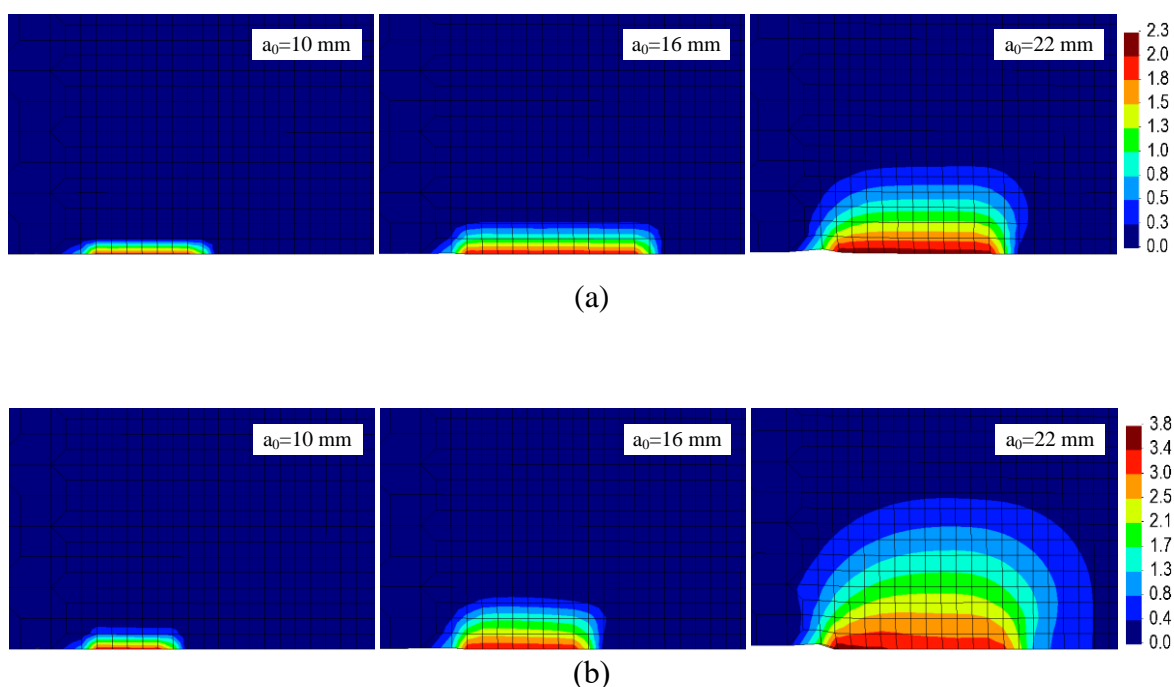
o comportamento das curvas numéricas  $da/dN - \Delta K$  utilizando o critério IPS, verifica-se que à medida que o valor crítico de  $\Delta \varepsilon^P$  vai aumentando, a curva  $da/dN - \Delta K$  vai se deslocando para baixo. Isto é espectável pois quanto maior for o valor crítico de  $\Delta \varepsilon^P$ , mais ciclos serão necessários para que ocorra a propagação o que faz diminuir a velocidade de propagação. Considerando agora comprimentos de fenda pequenos ( $a < 16$  mm) verifica-se que os resultados numéricos são idênticos em ambos os critérios. Contudo quando os comprimentos de fenda são maiores, verifica-se que as velocidades de propagação utilizando o critério IPS são inferiores às velocidades de propagação obtidas utilizando o critério TPS. Isto vai ao encontro da diferença observada na evolução da deformação plástica ao longo de duas propagações (Figura 6.2). Assim, a precisão da previsão do critério de propagação TPS é maior quando comparado com o critério de propagação IPS. Considerando o critério TPS para pequenos comprimentos de fenda, a diferença entre as curvas  $da/dN - \Delta K$  experimental e numérica é mais pequena quando se utiliza o estado plano de deformação (DP). Por outro lado, o uso do estado plano de tensão (TP) reduz a diferença entre as curvas  $da/dN - \Delta K$  experimentais e numéricas para comprimentos de fenda maiores.



**Figura 6.5.** Comparação entre as curvas  $da/dN - \Delta K$  experimentais e numéricas para o material Ti-6Al-4V + TT: (a) Previsão da velocidade de propagação considerando estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação IPS e TPS; (b) Previsão da velocidade de propagação considerando o estado plano de tensão (TP) usando os critérios de propagação IPS e TPS.

A Figura 6.5 apresenta os resultados numéricos para o material Ti-6Al-4V + TT, para ambas as condições de simplificação (DP e TP) e ambos os critérios de propagação (IPS e TPS). À semelhança do que aconteceu no material Ti-6Al-4V + HIP, os resultados numéricos vão ao encontro com os resultados experimentais, expeto os resultados obtidos com o critério IPS calibrados com um comprimento de fenda igual a 22 mm, principalmente para valores de  $\Delta K$  mais baixos. Analogamente ao que acontece no material anterior, quando se opta pelo critério de propagação IPS, a previsão da curva  $da/dN - \Delta K$  desloca-se para baixo à medida que o valor crítico de  $\Delta \epsilon^P$  aumenta. Verifica-se que a gama de valores críticos de  $\Delta \epsilon^P$  é superior no caso do material Ti-6Al-4V + TT o que poderá explicar a maior diferença entre as curvas experimentais e numéricas obtidas com o critério de propagação IPS. Como já foi dito anteriormente, os valores críticos de  $\Delta \epsilon^P$  foram calibrados para comprimentos de fenda iguais a 7 mm e 22 mm, e é por essa razão que as curvas  $da/dN - \Delta K$  numéricas e experimentais se intersectam no ponto usado para calibrar o valor crítico de  $\Delta \epsilon^P$ . Considerando comprimentos de fenda pequenos ( $a < 16$  mm), a diferença entre os critérios de propagação IPS e TPS é negligenciável. Contudo, para comprimentos de fenda superiores ( $a > 16$  mm), o declive da curva  $da/dN - \Delta K$  obtida pelo critério de propagação TPS aumenta, principalmente no estado plano de tensão (TP). Para estes comprimentos de fenda, apenas o critério de propagação TPS em estado plano de tensão (TP) consegue ter uma previsão razoável dos valores experimentais. Por outro lado, para pequenos comprimentos de fenda, o estado plano de deformação (DP) apresenta uma maior precisão (ver Figura 6.5(b)).

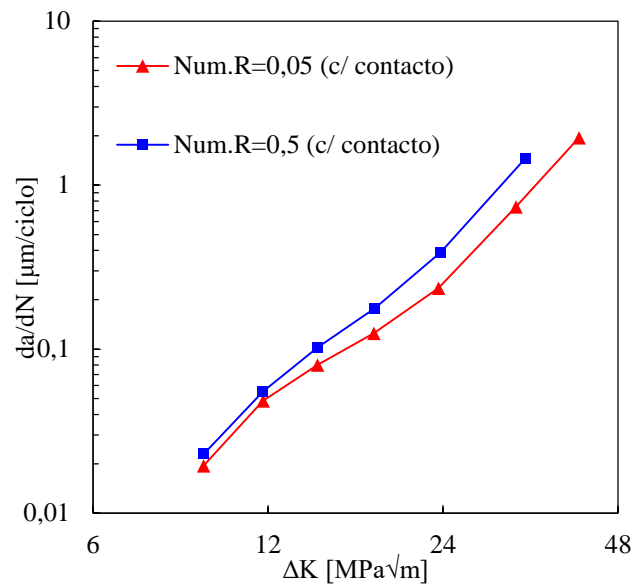
A distribuição da deformação plástica no provete para o material Ti-6Al-4V + TT para diferentes comprimentos de fenda e condições de fronteira encontra-se apresentada na Figura 6.6. Da imagem conseguem-se tirar duas conclusões: o tamanho da zona deformada plasticamente aumenta com o aumento do comprimento da fenda; o tamanho da zona de deformação plástica é superior no estado plano de tensão (TP) do que no estado plano de deformação (DP). Com isto consegue-se perceber o porquê do critério de propagação TPS ter uma velocidade de propagação maior para comprimentos de fenda superiores quando comparada com a velocidade de propagação obtida para os mesmos comprimentos de fenda.



**Figura 6.6.** Zona plástica em redor da extremidade da fenda com diferentes comprimentos de fenda inicial no material Ti-6Al-4V + TT: (a) estado plano de deformação (DP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico igual a  $\epsilon^P=1,254$ ; (b) estado plano de tensão (TP) usando o critério de propagação TPS com valor crítico de  $\epsilon^P=2,233$

#### 6.1.4. Efeito da razão de tensão

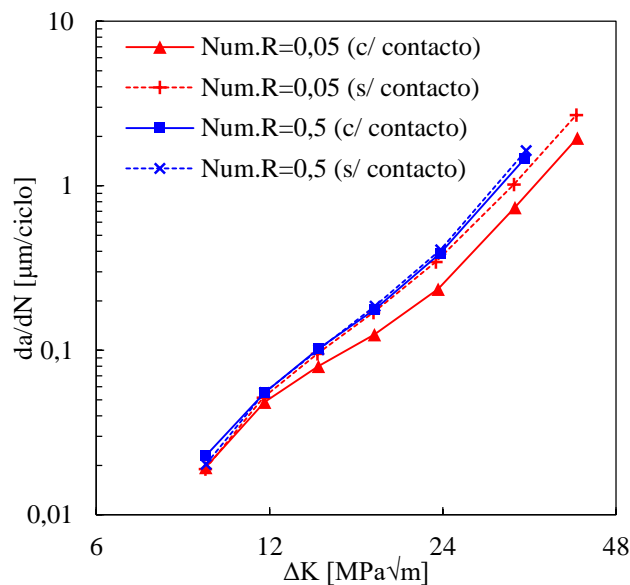
Com o objetivo de estudar o efeito da razão de tensão ( $R$ ) na PFF, foram feitas simulações com diferentes valores de razão de tensão. As razões de tensão utilizadas foram 0,05 e 0,5. Para cada razão de tensão fizeram-se duas simulações diferentes. Num dos casos, a modelização do contacto dos flancos da fenda é realizada, enquanto que no outro caso, esta modelização não é efetuada. Por outras palavras, é possível desativar o fenómeno de fecho de fenda, o que é muito interessante para perceber o seu efeito. Neste subcapítulo todas as simulações foram executadas admitindo que o material era o Ti-6Al-4V + HIP, onde o critério de propagação utilizado foi TPS com um valor crítico  $\epsilon^P$  igual a 1,533 e que a condição de fronteira utilizada foi o estado plano de tensão (TP).



**Figura 6.7.** Efeito da razão de tensão na curva  $da/dN$ - $\Delta K$  considerando o contacto dos flancos da fenda, para o material Ti-6Al-4V + HIP utilizando o critério de propagação TPS com valor crítico  $\epsilon^P$  igual a 1,533 com  $R=0,5$  e  $R=0,05$ .

Na Figura 6.7 são apresentados os resultados com modelação do contacto dos flancos da fenda para dois valores de razão de tensão ( $R=0,05$  e  $R=0,5$ ). Como se pode observar na Figura 6.7, as velocidades de propagação são superiores para a razão de tensão igual a 0,5. Considerando pequenos comprimentos de fenda ( $a < 16$  mm), verifica-se que a velocidade de propagação em ambas as razões de tensão é muito parecida. Por outro lado, para valores de fenda maiores, verifica-se um aumento da diferença das velocidades de propagação entre as duas razões de tensão. Com base nesta figura pode-se dizer que a velocidade de propagação aumenta com a razão de tensão e que a influência da razão de tensão é mais significativa para comprimento de fenda maiores.





**Figura 6.8.** Comparação dos resultados numéricos (com contacto nos flancos vs sem contacto nos flancos) para as razões de tensão  $R=0,05$  e  $R=0,5$ .

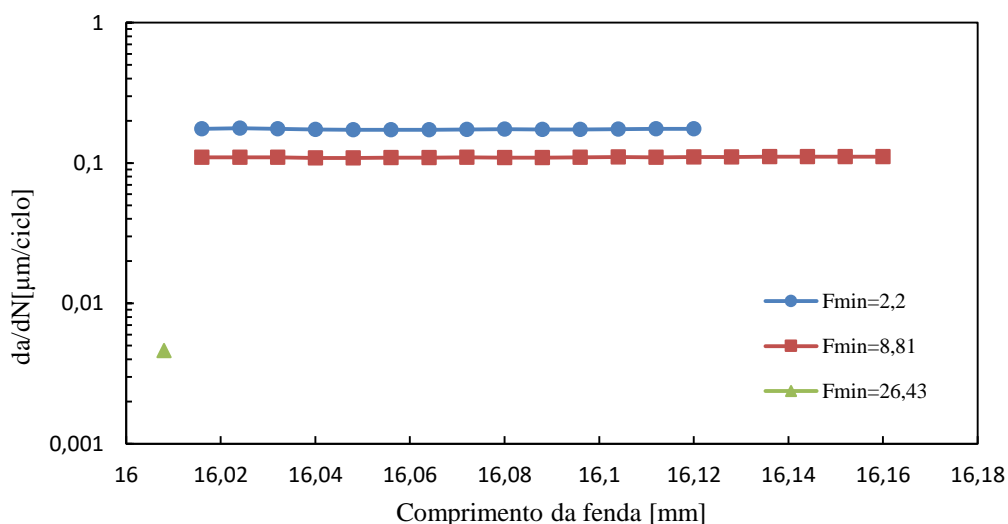
Na Figura 6.8 é apresentada a comparação entre os resultados numéricos considerando o contacto dos flancos e os resultados numéricos desprezando o contacto dos flancos, para diferentes razões de tensão.

Começando com as curvas com  $R=0,05$ , verifica-se que a velocidade é superior quando não se considera o contacto dos flancos da fenda, sendo que esta diferença é claramente observável para comprimentos de fenda superiores. Comparando agora as curvas com  $R=0,5$ , nota-se que ambas as curvas são praticamente coincidentes ao longo de toda a propagação. De um ponto de vista global, observa-se que a curva com  $R=0,05$  que não considera o contacto dos flancos está coincidente com ambas as curvas  $R=0,5$ . Estas observações poderão indicar que se a modelação do contacto dos flancos da fenda não for considerada, o efeito da razão de tensão ( $R$ ) desaparece. Por outras palavras, o efeito de  $R$  não está associado a alterações da deformação plástica cíclica na extremidade da fenda.

### 6.1.5. Avaliação do limiar de fadiga

Na presente dissertação avaliou-se o limiar de fadiga para o material Ti-6Al-4V + HIP. Para se fazer esta avaliação fixou-se um certo comprimento de fenda e uma carga máxima, e depois disso foi-se aumentando a carga mínima, permitindo reduzir o valor de  $\Delta K$ . O aumento progressivo da carga mínima leva à diminuição do valor do parâmetro  $\Delta K$ , que por sua vez faz diminuir a velocidade de propagação da fenda até que

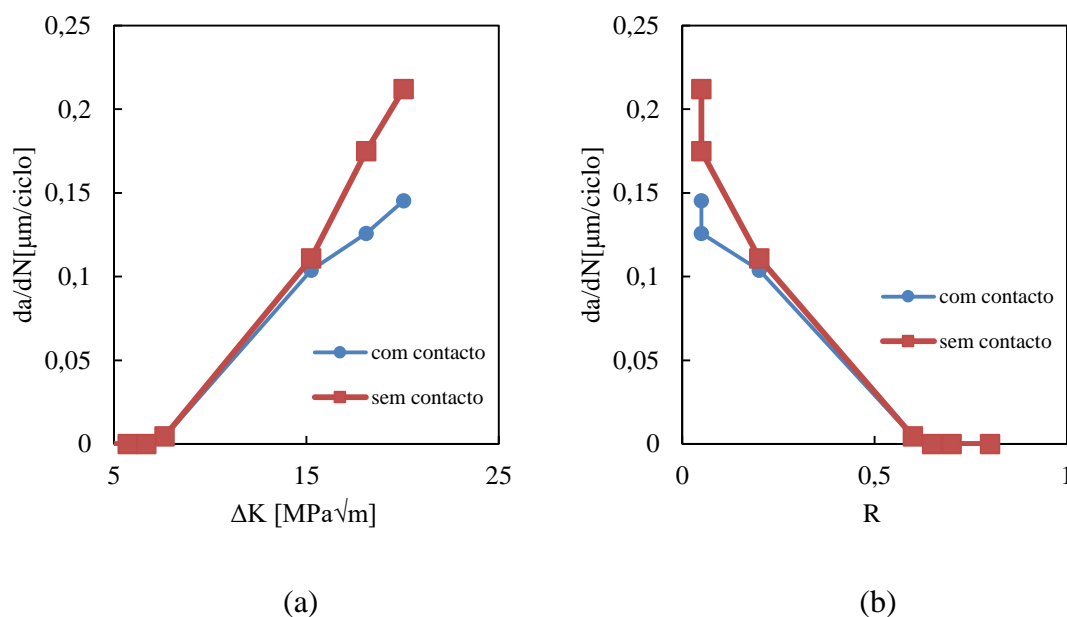
esta pare completamente. Foram feitas 3 simulações em que se fixou a carga máxima com valor igual a 44,05 N e o comprimento de fenda igual a 16 mm, mudando apenas o valor de carga mínima. Os valores de carga mínima utilizados foram: 2,2 N, 8,81 N e 26,43 N, o que corresponde a razões de tensão iguais a  $R=0,05$ ,  $R=0,2$  e  $R=0,6$ , respetivamente. O critério de propagação utilizado foi o TPS com um valor crítico de  $\epsilon^P$  igual a 1,533, considerando o estado plano de tensão (TP). Além disso, nestas simulações, o contacto dos flancos da fenda não foi modelado. Na Figura 6.9 são apresentados os resultados numéricos obtidos.



**Figura 6.9.** Evolução da velocidade em função do comprimento de fenda para diferentes cargas mínimas.

Considerando que a velocidade de propagação na simulação com carga mínima igual a 26,43 N é já bastante reduzida, calculou-se o limiar de propagação com a equação 2.2. O valor obtido para o limiar de propagação foi de 7,72 MPa $\sqrt{m}$ . Quando se remove o contacto do modelo de simulação a velocidade de propagação tende a estabilizar muito mais rapidamente, como de realça da comparação da Figura 6.9 com a Figura 6.3.

Aproveitando algumas simulações efetuadas neste subcapítulo, estudou-se de que modo a modelação ou não modelação do contacto dos flancos da fenda pode influenciar a PFF considerando vários valores de razão de carga ( $R$ ). Na Figura 6.10 são apresentados os resultados obtidos.



**Figura 6.10** Resultados de PFF considerando com e sem modelação do contacto dos flancos da fenda em estado plano de tensão: (a) Velocidade de propagação em função do parâmetro  $\Delta K$ ; (b) Velocidade de propagação em função da razão de tensão ( $R$ ).

Da Figura 6.10 pode-se dizer que à medida que  $R$  diminui, as curvas  $da/dN - \Delta K$  tendem em afastar-se (ver Figura 6.10(a)), ou seja o efeito do contacto é predominante para valores reduzidos de  $R$ . Considerando razões de tensões mais pequenas, verifica-se que a velocidade de propagação é superior quando não se modela o contacto dos flancos da fenda. Isto vai em consonância com os resultados obtidos no subcapítulo anterior (ver Figura 6.8).

## 6.2. Amplitude de cargas constantes com sobrecargas

Com o objetivo de estudar o efeito das sobrecargas no processo de PFF, estudaram-se diferentes rácios de sobrecarga (OLR) para o mesmo comprimento de fenda e vários comprimentos de fenda para um rácio de sobrecarga específico. Estudaram-se três rácios de sobrecarga (OLR) diferentes para  $a_0=16$  mm sendo estes: OLR=1,5; OLR=1,75 e OLR=2,0. Os comprimentos de fenda utilizados para estudar a influência das sobrecargas foram:  $a=12,5$  mm;  $a=16,1$  mm e  $17,4$  mm. O critério de propagação utilizado foi o TPS com um valor crítico de  $\epsilon^P$  igual a 1,215 para o estado plano de deformação (DP) e 1,533

para o estado plano de tensão (TP). O material usado para o estudo de sobrecargas foi o Ti-6Al-4V + HIP.

Em vários estudos de aplicação de uma sobrecarga, verificou-se que aplicação de uma sobrecarga afeta a velocidade de propagação da fenda após a sobrecarga. De um modo geral a evolução da velocidade de propagação após a sobrecarga é transiente. A velocidade de propagação logo após a sobrecarga tende a subir até um pico e depois baixa até uma velocidade mínima, que é mais baixa do que aquela antes da sobrecarga. Depois de atingir o mínimo, a velocidade tende a estabilizar para uma certa velocidade de propagação, sendo que esta velocidade está dependente do rácio de sobrecarga (OLR).

O valor do rácio de sobrecarga (OLR) pode ser calculado:

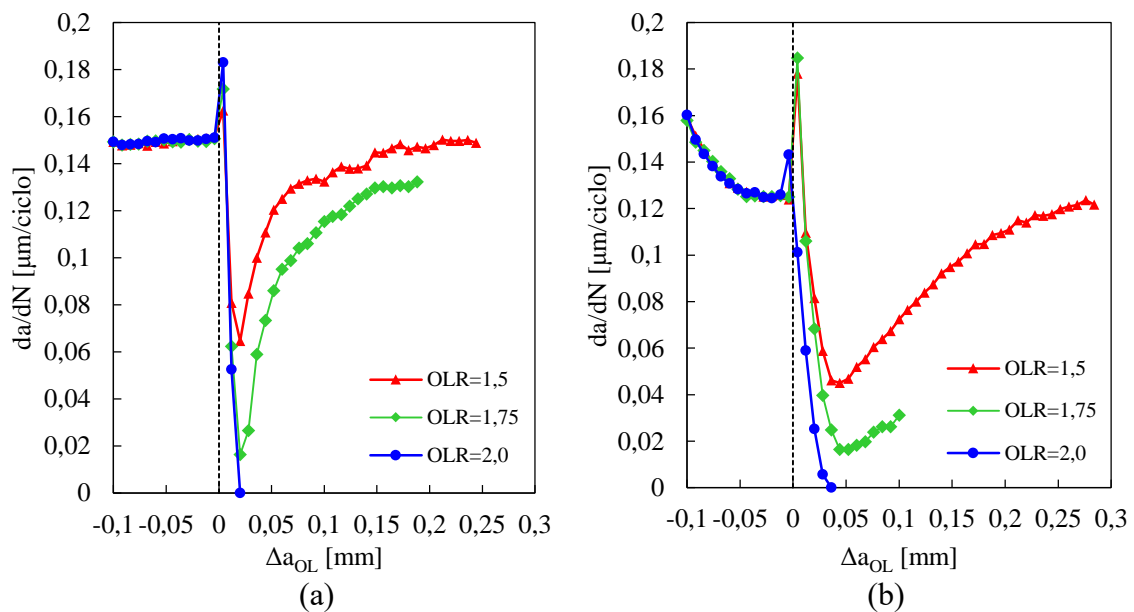
$$\text{OLR} = \frac{\Delta K_{\text{OL}}}{\Delta K_{\text{BL}}}, \quad (6.1)$$

onde  $\Delta K_{\text{OL}}$  e  $\Delta K_{\text{BL}}$  são parâmetros de variação de intensidade de tensão na sobrecarga e na amplitude constante, respetivamente.

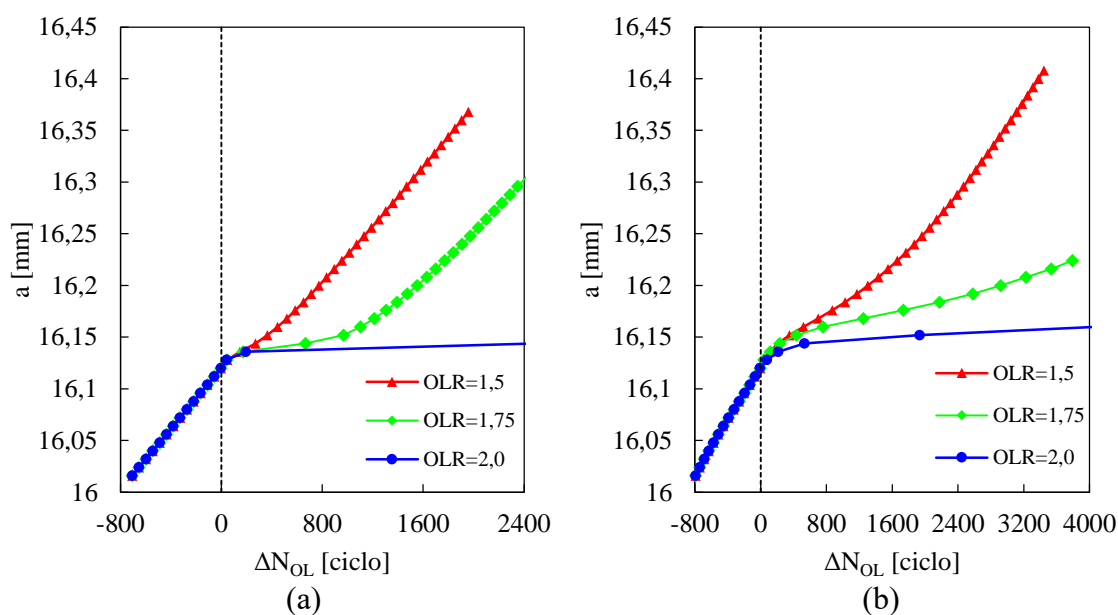
### 6.2.1. Efeito do rácio de sobrecarga

Nesta secção serão apresentados e discutidos os resultados numéricos obtidos para estudar a influência do rácio de sobrecarga (OLR) aquando de uma sobrecarga. A influência do rácio de sobrecarga foi estudada partindo um comprimento inicial de fenda igual a 16 mm. O carregamento base é idêntico ao utilizado anteriormente, ou seja,  $F_{\text{mím}}=2,2$  N e  $F_{\text{máx}}=44,05$  N. A evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda para diferentes rácios de sobrecargas (OLR) é apresentado na Figura 6.11, onde  $\Delta a_{\text{OL}} = 0$  representa o comprimento no instante de aplicação da sobrecarga. A velocidade de propagação logo após a sobrecarga tende a subir até um pico e depois baixa rapidamente até uma velocidade mínima, que é mais baixa do que aquela antes da sobrecarga. Depois a velocidade de propagação converge para uma velocidade próxima daquela que tinha antes da sobrecarga. Tal como nos resultados numéricos obtidos anteriormente para amplitude de carga constante, a velocidade de propagação da fenda estabiliza mais rapidamente no estado plano de deformação (DP), como se mostra na Figura 6.11. Além disso verifica-se também que a estabilização da

velocidade de propagação da fenda é mais demorada à medida que OLR aumenta. No entanto, quando o rácio de sobrecarga é muito elevado a velocidade de propagação tende para zero e, portanto, deixa de existir propagação. Para as sobrecargas com OLR igual a 2, o encruamento é tão elevado que o carregamento aplicado depois da sobrecarga (igual ao carregamento que antecede a sobrecarga) não é suficiente para que o material atinja o regime plástico na extremidade da fenda.



**Figura 6.11.** Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda para diferentes rácios de sobrecargas (OLR), obtida considerando um comprimento de fenda inicial igual a 16 mm: (a) estado plano de deformação; (b) estado plano de tensão.



**Figura 6.12.** Evolução do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos para diferentes rácios de sobrecargas (OLR) considerando um comprimento de fenda inicial igual a 16 mm: (a) estado plano de deformação; (b) estado plano de tensão.

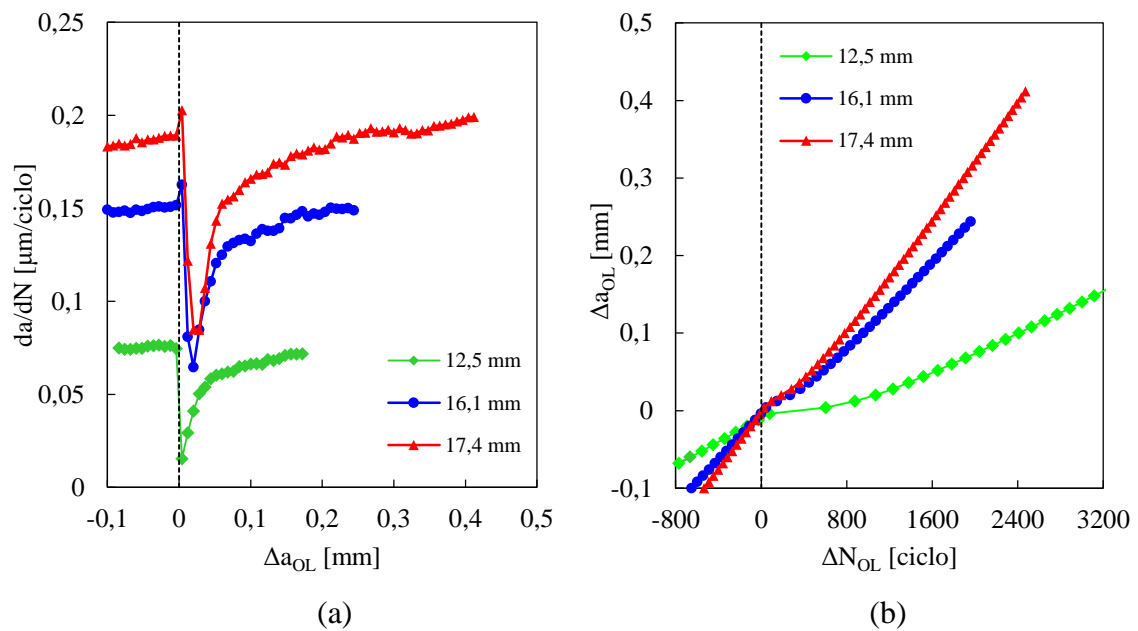
A evolução do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos para diferentes rácios de sobrecargas é apresentada na Figura 6.12, onde  $N_{OL} = 0$  representa o ciclo de carga onde é aplicada a sobrecarga. O aumento do rácio de sobrecarga (OLR) conduz a uma maior dimensão da zona de transição. Além disso, para as mesmas condições, o regime transiente da evolução do comprimento da fenda é maior quando se utiliza o estado plano de tensão. À semelhança dos resultados anteriores, a o regime transiente é maior no estado plano de tensão devido ao facto da zona plástica ser superior neste estado.

### 6.2.2. Influência do comprimento de fenda

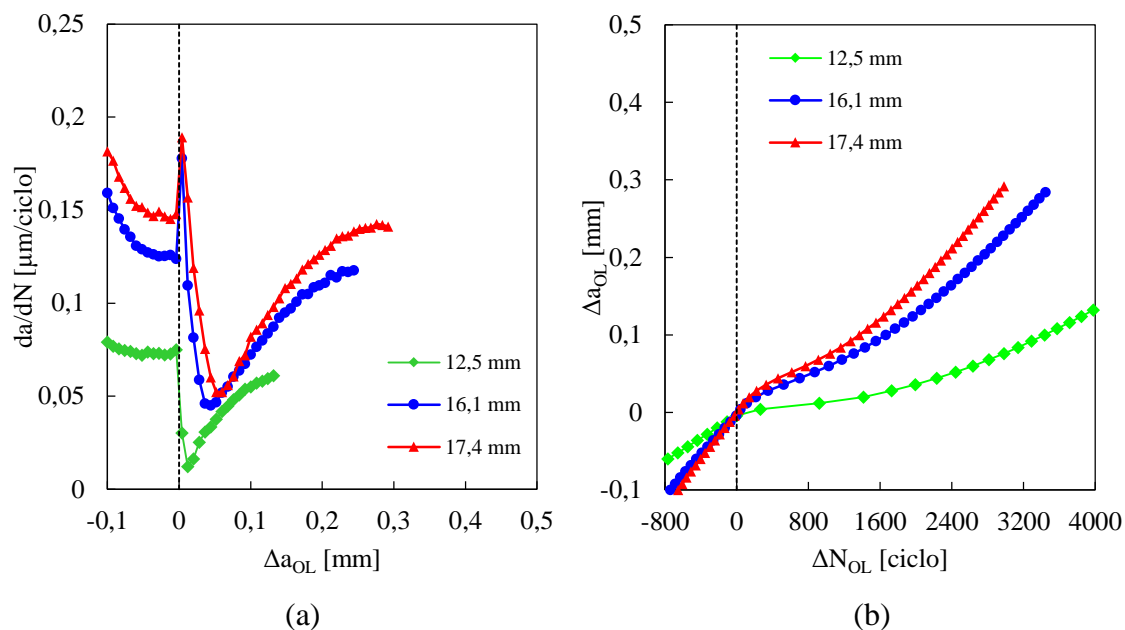
Neste subcapítulo pretende-se estudar a influência do comprimento da fenda no processo de PFF aquando de uma sobrecarga. Tendo em vista este estudo, fixaram-se dois rácios de sobrecarga (OLR) e para cada rácio fez-se o estudo da PFF para vários comprimentos de fenda.

### 6.2.2.1. Influência do comprimento da fenda na PFF para um rácio de sobrecarga igual a 1,5

Fixou-se o rácio de sobrecarga (OLR) com valor igual a 1,5 e fez-se a sobrecarga para diferentes valores de comprimento de fenda. Os valores de comprimento de fenda estudados foram: 12,5 mm, 16,1 mm e 17,4 mm. A Figura 6.13 e Figura 6.14 apresentam os resultados numéricos obtidos para condições de fronteira DP e TP, respetivamente.

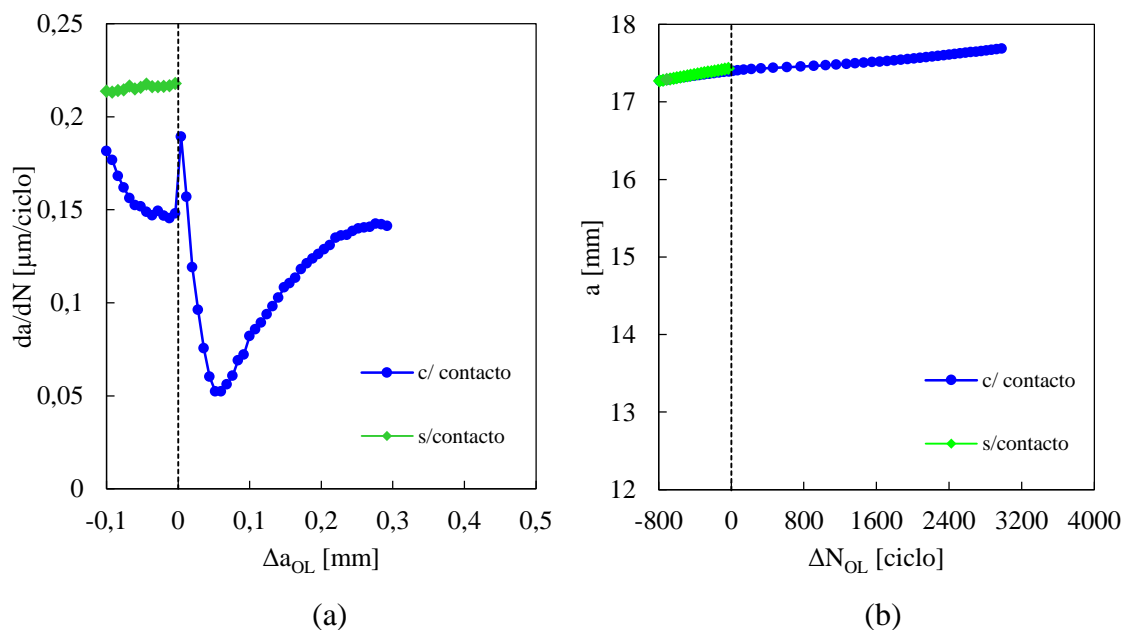


**Figura 6.13.** Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 1,5 para diferentes comprimentos de fenda, considerando estado plano de deformação (DP): (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.



**Figura 6.14.** Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 1,5 para diferentes comprimentos de fenda, considerando o estado plano de tensão (TP). (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.

À semelhança do que acontece nos outros resultados numéricos anteriores, a estabilização dá-se mais rápido no estado plano de deformação (DP) e para tamanhos de fenda mais pequenos.



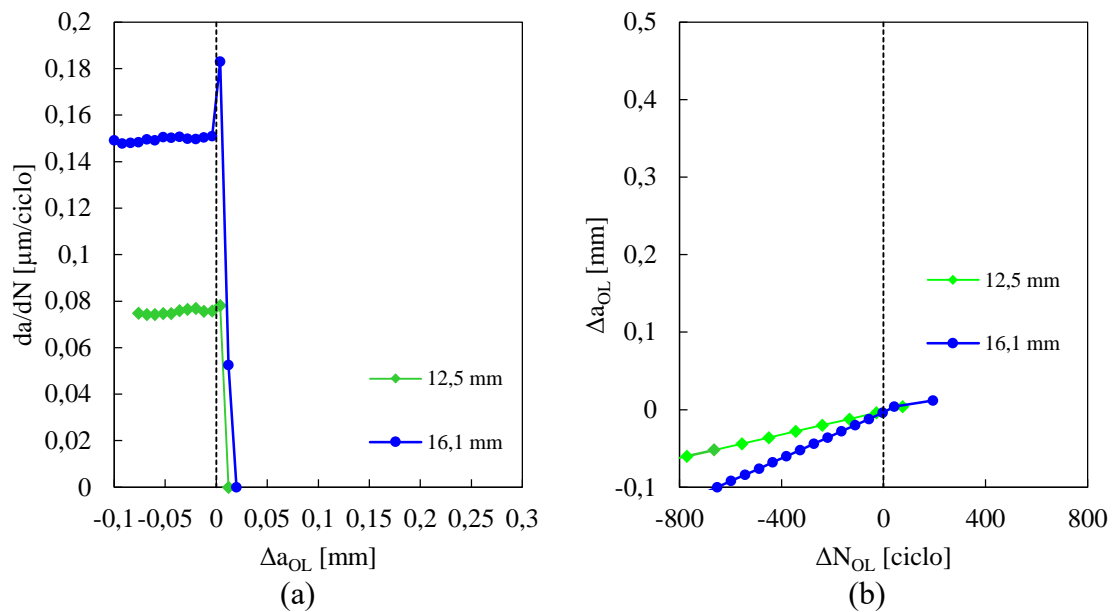
**Figura 6.15.** Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 1,5 e comprimento de fenda igual a 17,4 mm, com e sem modelação do contacto entre os flancos da fenda. (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.



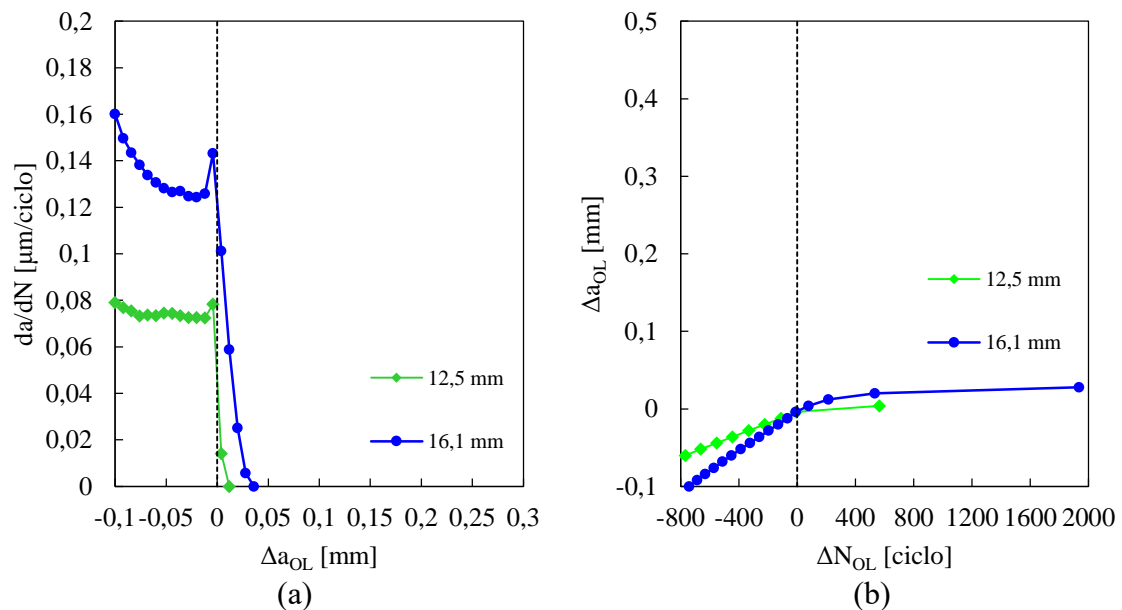
Na Figura 6.15 observam-se os resultados numéricos obtidos para as simulações com um rácio de sobrecarga (OLR) igual a 1,5 onde o comprimento de fenda onde se dá a sobrecarga é igual a 17,4 mm, com e sem contacto nos flancos da fenda. Verifica-se que a fenda só propagou depois da sobrecarga quando foi considerado o contacto dos flancos da fenda. No caso de não se modelar o contacto dos flancos, a fenda não propaga após a sobrecarga. Isto pode ser explicável com o aumento da zona plástica aquando da sobrecarga o que fará encruar muito o material e por sua vez, depois da sobrecarga, o carregamento não é capaz de atingir o regime plástico não contribuindo assim para o aumento da deformação plástica. O não aumento da deformação plástica significa que não haverá propagações, de acordo com os critérios utilizados nesta dissertação. A existência de propagações quando se modela o contacto dos flancos da fenda revela que esse contacto poderá reduzir a deformação plástica em torno da fenda e assim o encruamento não será tão elevado. Não sendo o encruamento tão elevado, o carregamento após a sobrecarga é capaz de atingir o regime plástico e assim contribuir para o avanço da fenda. Uma vez que a velocidade de propagação imediatamente antes da sobrecarga é maior quando não se modela o contacto quando comparada com os resultados com a modelação do contacto (ver Figura 6.15), indica que o incremento de deformação plástica gerado em cada ciclo de carga é maior quando não existe contacto.

#### **6.2.2.2. Influência do comprimento da fenda na PFF para um rácio de sobrecarga igual a 2**

Fixou-se o rácio de sobrecarga com valor igual a 2,0 e executou-se a sobrecarga para diferentes valores de comprimento de fenda. Os valores de comprimento de fenda estudados foram: 12,5 mm e 16,1 mm. Nas figuras (Figura 6.16 e Figura 6.17) são apresentados os resultados numéricos obtidos para ambas as condições de fronteira (DP e TP).



**Figura 6.16.** Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 2,0 para diferentes comprimentos de fenda, em o estado plano de deformação (DP). (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.



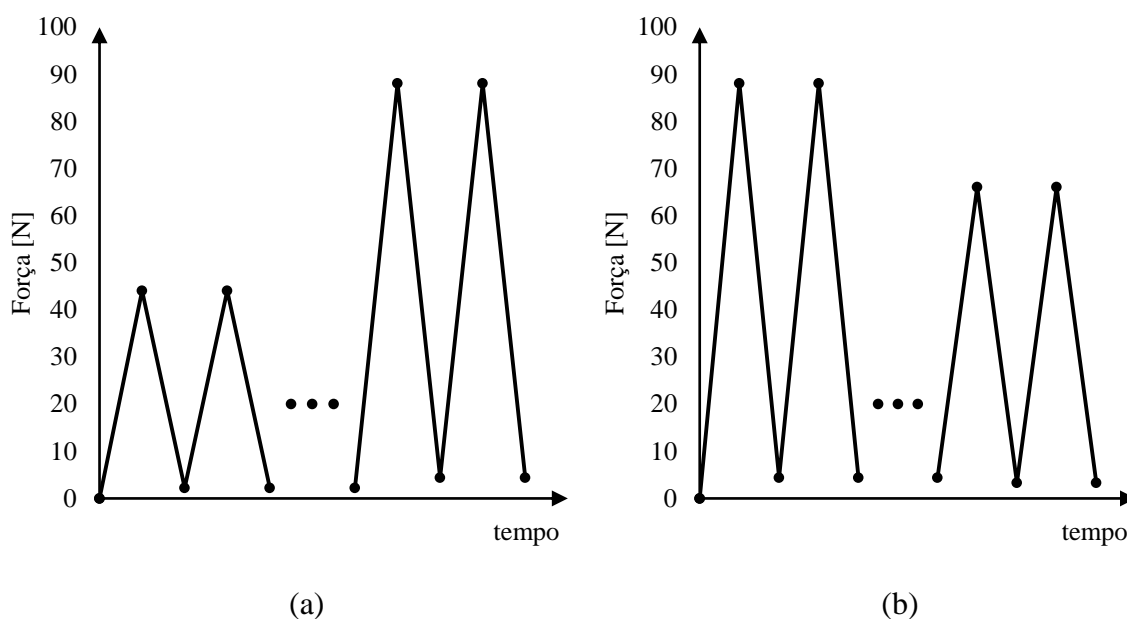
**Figura 6.17.** Resultados numéricos obtidos com um OLR igual a 2,0 para diferentes comprimentos de fenda, em estado plano de tensão (TP). (a) Evolução da velocidade de propagação da fenda em função da variação do comprimento da fenda; (b) Evolução da variação do comprimento da fenda em função da variação do número de ciclos.

Considerando as sobrecargas com rácios de sobrecarga igual a 2,0, para diferentes comprimentos de fenda (12,5 mm e 16,1 mm) e diferentes condições de simplificação (DP e TP), verifica-se que a velocidade de propagação cai para zero logo após a sobrecarga. Isto pode ser explicado pelo encruamento do material ser muito

acentuado devido à sobrecarga. Este encruamento foi de tal ordem acentuado que o carregamento aplicado depois da sobrecarga (que tem a mesma magnitude do carregamento aplicado antes da sobrecarga) não é suficiente para que se atinja o regime plástico do material. Assim, a deformação plástica na extremidade da fenda não vai aumentar e por essa razão o valor crítico de  $\epsilon^P$  nunca será alcançado e as propagações não acontecem o que irá refletir no valor da velocidade de propagação da fenda que será zero. À semelhança dos resultados numéricos obtidos anteriormente, a velocidade de propagação da fenda estabiliza mais rápido para o caso de estado plano de deformação (DP).

### 6.3. Amplitude de cargas variável definida por blocos

O objetivo desta secção é estudar o comportamento da velocidade de propagação da fenda na transição entre dois blocos de carga com amplitude de carga constante. Todas as simulações foram feitas admitindo que o material era Ti-6Al-4V + HIP e que o comprimento inicial da fenda era de 16 mm. Além disso, para as quatro simulações, o critério de propagação de fenda à fadiga utilizado foi o TPS, sendo o valor crítico de  $\epsilon^P$  igual a 1,215 para estado plano de deformação (DP) e 1,533 para estado plano de tensão (TP). Na Figura 6.18 são apresentados os dois espectros de blocos de cargas estudados na presente dissertação. Cada espectro é constituído por dois blocos de carga de com amplitude de carga constante, em que ambos têm razão de tensão (R) igual a 0,05. Na Figura 6.18 (a) é apresentado o espectro crescente, em que a carga máxima do primeiro bloco é igual a 44,05 N e a carga máxima do segundo bloco é igual a 88,1 N, aumentando assim 100% a carga no segundo bloco em relação ao primeiro bloco. Na Figura 6.18 (b) é apresentado o espectro decrescente, em que a carga máxima no primeiro bloco é 88,1 N enquanto que a carga no segundo bloco é igual a 66,075 N, diminuindo assim 25% a carga do segundo bloco em relação ao primeiro bloco.

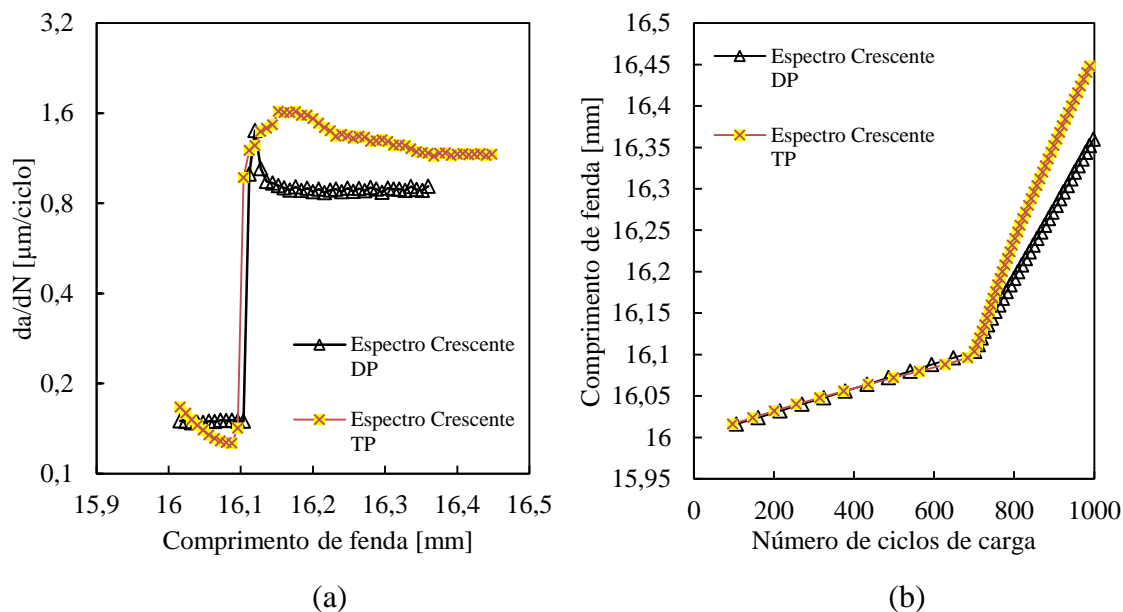


**Figura 6.18.** Representação esquemática dos espectros de carga estudados na presente dissertação para a situação de amplitude de carga variável definida por blocos: espectro crescente (a) e espectro decrescente (b).

### 6.3.1. Espectro crescente

Na Figura 6.19 (a) são apresentados os resultados numéricos da evolução da velocidade de propagação em função do comprimento de fenda, obtidos com o espectro de carga crescente para ambas as condições de fronteira. Para o espectro de carga crescente era espectável que a velocidade de propagação aumentasse do primeiro para o segundo bloco de carga. A transição entre blocos de carga ocorre para aproximadamente 16,1 mm de comprimento de fenda. A velocidade de propagação de fenda no final do primeiro bloco depende das condições de fronteira utilizadas (TP e DP). Isto está de acordo com os resultados obtidos para a situação de amplitude de carga constante (ver Figura 6.4), onde a velocidade prevista em estado plano de deformação (DP) era superior à obtida em estado plano de tensão (TP). Na transição entre os dois blocos de carga existe um aumento da velocidade de propagação, seguindo de uma convergência para o valor associado ao segundo bloco de carga. No entanto esta estabilização é mais lenta quando se considera o estado plano de tensão (TP), como se mostra na Figura 6.19 (a). Além disso, o comprimento de fenda associado à maior velocidade de propagação é maior para estas condições de fronteira. Na zona estável da velocidade de propagação, a velocidade prevista

em estado plano de deformação (DP) era inferior à obtida em estado plano de tensão (TP), o que está de acordo com a Figura 6.4 para valores mais elevados de  $\Delta K$ .



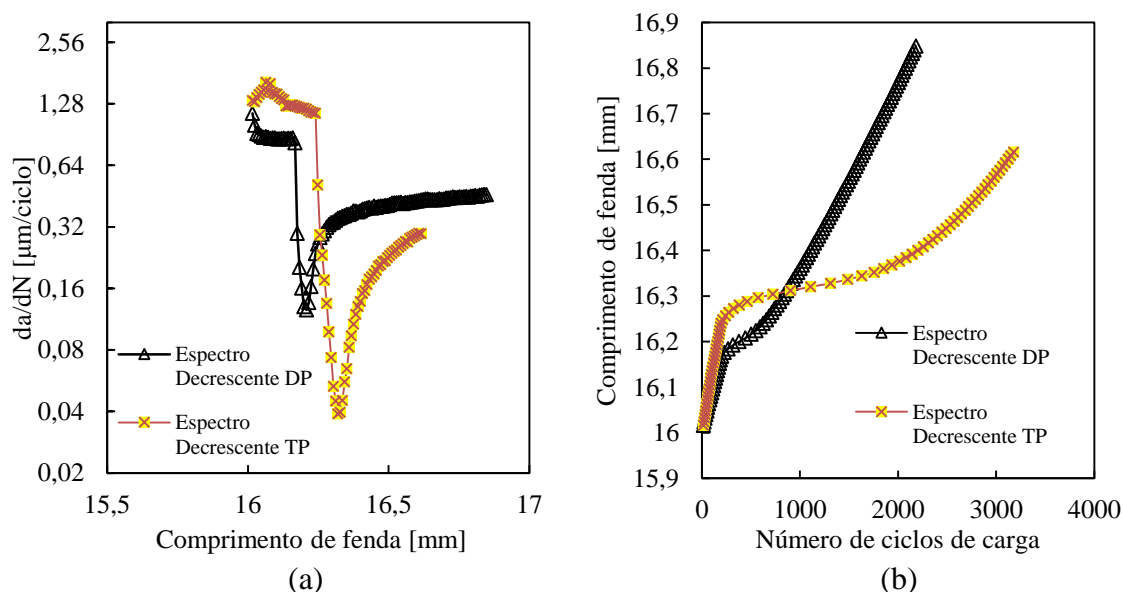
**Figura 6.19.** Comportamento transiente para a situação de amplitude de carga variável definida por blocos (espectro crescente): (a) evolução da velocidade de propagação com o comprimento da fenda; (b) evolução do comprimento de fenda com o número de ciclos de carga aplicados.

A evolução do comprimento de fenda com o número de ciclos de carga aplicados é apresentada na Figura 6.19 (b), na qual se compara a situação de estado plano de deformação com estado plano de tensão. O aumento do comprimento da fenda é significativamente mais acentuado no segundo bloco de carga em comparação com o primeiro bloco de carga. Apesar de as condições de fronteira não terem grande impacto na evolução do comprimento de fenda durante o primeiro bloco de carga, o comprimento de fenda após 1000 ciclos de carga é significativamente diferente em cada uma das condições de fronteira. Além disso, a evolução associada ao segundo bloco de carga é diferente, particularmente durante o regime transiente.

### 6.3.2. Espectro decrescente

Na Figura 6.20 (a) são apresentados os resultados numéricos da evolução da velocidade de propagação em função do comprimento de fenda, obtidos com o espectro decrescente. Como se pode observar, a passagem de um bloco de carga superior para um

inferior tem um comportamento bastante característico. Quando se dá a transição, a velocidade de propagação baixa drasticamente até um mínimo e depois desse mínimo volta a crescer até estabilizar numa certa velocidade de propagação. Verifica-se que a velocidade de propagação de fenda estabiliza mais rapidamente para o estado plano de deformação (DP), tal como já acontecia para o caso do espectro crescente. Uma vez que a velocidade de propagação no segundo bloco de carga é inferior quando se utiliza o estado plano de tensão, o efeito transitório é mais pronunciado na evolução do comprimento de fenda com o número de ciclos de carga aplicados, apresentada na Figura 6.20 (b). O número de ciclos de carga necessários para a estabilização da velocidade de propagação no segundo bloco de carga é significativamente superior quando se utiliza o estado plano de tensão na simulação, como se mostra na Figura 6.20 (b). Aliás, após 3000 ciclos de carga, a evolução do comprimento de fenda ainda não está totalmente estabilizada.

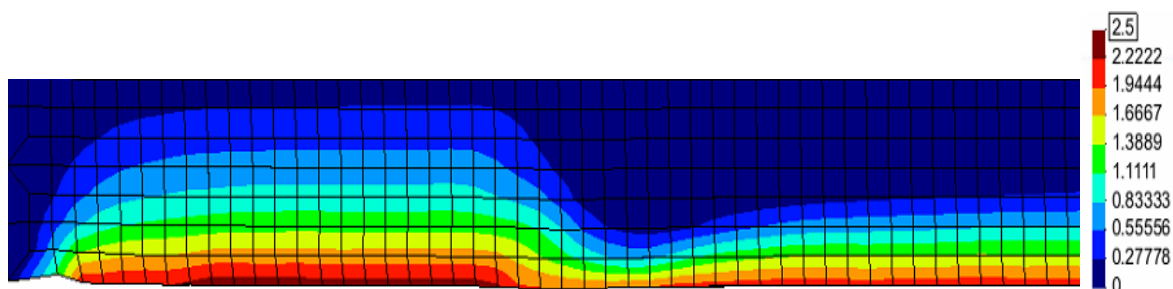


**Figura 6.20.** Evolução da propagação de fenda para o caso de espectro decrescente na zona de mudança de blocos de carga.

Na Figura 6.21 é possível observar a zona de deformação plástica em torno da fenda para o caso do espectro decrescente considerando o estado plano de deformação. A fenda propaga da esquerda para a direita e é possível identificar as várias fases ao longo do espectro, nomeadamente a transição entre os dois blocos de carga. De notar que esta distribuição de deformação plástica ao longo da fenda vai de encontro aos resultados

obtidos anteriormente (Figura 6.20), pois verifica-se que o tamanho da zona de deformação é proporcional à velocidade de propagação.

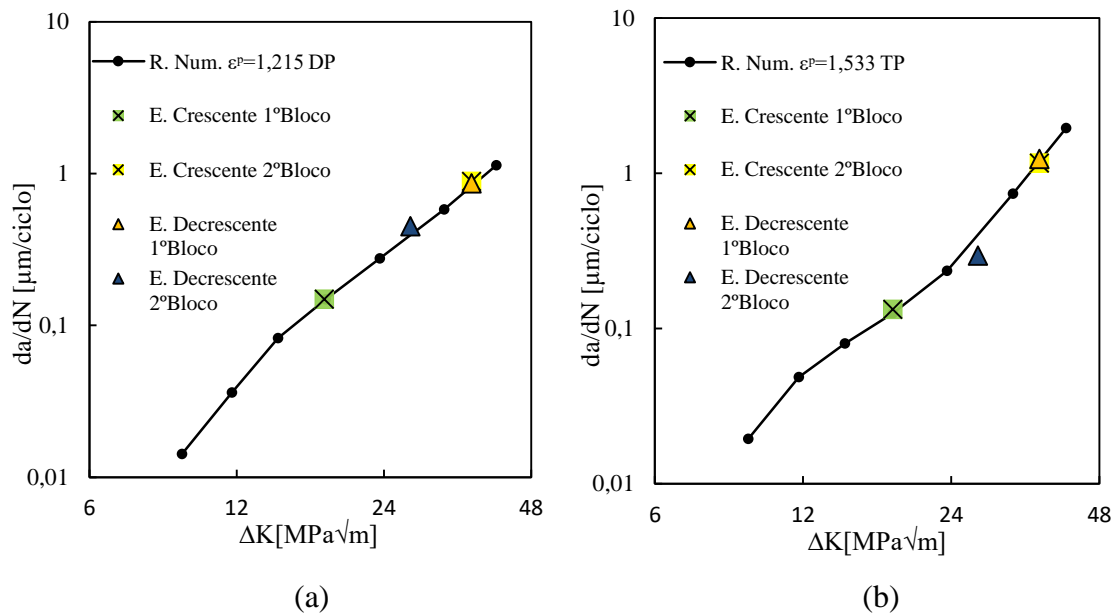
Por exemplo, na zona transiente entre os dois blocos é onde as velocidades de propagação atingem mínimos e como era de esperar, o tamanho da zona de deformação plástica será mais reduzido. Essa zona é perfeitamente visível na Figura 6.21.



**Figura 6.21.** Distribuição da deformação plástica ao longo da fenda numa situação de amplitude de cargas variável definida por blocos (espectro decrescente) considerando o estado plano de deformação (DP) no Ti-6Al-4V +HIP.

### 6.3.3. Influência dos blocos na PFF

Além do estudo da velocidade de propagação na zona de transição entre blocos de carga, estudou-se ainda de que forma os blocos de carga com razão de tensão igual a 0,05 poderiam influenciar a PFF. Esta análise foi feita por comparação dos pontos ( $\Delta K$ ;  $da/dN$ ) obtidos para cada bloco dos espectros de carga com as curvas numéricas  $da/dN - \Delta K$  com razão de tensão igual a 0,05, obtidas anteriormente. De seguida são apresentados os resultados obtidos depois desta análise para os dois casos de condições de fronteira (DP e TP).



**Figura 6.22.** Resultados numéricos obtidos para o estudo da influência dos blocos na PFF: (a) para o estado plano de deformação (DP); (b) estado plano de tensão (TP).

A comparação entre a velocidade de propagação observada nas simulações referentes aos blocos de carga (zona estável) e a as curvas  $da/dN$ - $\Delta K$  obtidas anteriormente é apresentada na Figura 6.22. Da Figura 6.22 verifica-se que todos os pontos ( $\Delta K$ ;  $da/dN$ ) obtidos em cada bloco, estão coincidentes com as curvas  $da/dN$  -  $\Delta K$  à exceção de um ponto. Esse ponto corresponde ao 2º bloco do espectro decrescente na condição de estado plano de tensão (TP). Esse ponto não está coincidente pois como mostra a Figura 6.20 (a) a velocidade de propagação obtida em estado plano de tensão (TP) não chega a estabilizar completamente, ficando assim com uma velocidade um pouco inferior. É por essa razão que o ponto (E. decrescente 2ºbloco) na Figura 6.22 (b) se encontra abaixo da curva  $da/dN$  -  $\Delta K$  obtida anteriormente. Considerando que os pontos estavam todos coincidentes com as curvas, isto significa que nos espectros em que estão presentes vários blocos de carga com razões de tensão iguais, a velocidade de propagação da fenda não dependerá do histórico dos blocos no espectro. Assim, se um espectro com blocos de carga em que a razão de tensão (R) é igual em todos eles, a velocidade de propagação é facilmente prevista desde que se tenha uma curva  $da/dN$  -  $\Delta K$  com razão de tensão (R) igual à dos blocos.



## 7. CONCLUSÕES

Este estudo apresenta a modelação da propagação de fendas por fadiga num provete CT, considerando diferentes carregamentos.

Principais conclusões tiradas no subcapítulo Amplitudes de cargas constantes:

- O critério de propagação TPS adaptou-se melhor do que o critério IPS aos resultados experimentais;
- O critério de propagação TPS em estado plano de tensão foi o que se aproximou melhor dos resultados experimentais;
- O comprimento da fenda e as condições de fronteira têm muita importância no tamanho da zona plástica;
- A estabilização acontece mais rapidamente no estado plano de deformação (DP) devido ao facto de a zona de deformação plástica ser mais pequena em relação à zona de deformação plástica apresentada no estado plano de tensão (TP);
- A velocidade de propagação aumenta com a razão de tensão ( $R$ ) sendo este aumento mais significativo para comprimentos de fenda superiores;
- O efeito da razão de tensão ( $R$ ) parece desaparecer quando se despreza o contacto dos flancos da fenda;

Principais conclusões tiradas no subcapítulo Amplitudes de cargas constantes com sobrecargas:

- Imediatamente a seguir à sobrecarga existe uma queda abrupta na velocidade de propagação e finalmente um crescimento até convergir para uma velocidade próxima da velocidade inicial.
- Depois da sobrecarga, a velocidade de propagação estabiliza mais rapidamente para o estado plano de deformação (DP);

- Para sobrecargas muito elevadas, o encruamento do material na frente de fenda poderá ser demasiado elevado, o que poderá levar à paragem da propagação da fenda;
- A modelação do contacto dos flancos da fenda é muito importante no âmbito das sobrecargas. A modelação ou não modelação do contacto dos flancos terá resultados diferentes na deformação plástica na frente de fenda, que por sua vez têm influência no encruamento. Este encruamento está diretamente relacionado com a velocidade de propagação após a sobrecarga.

Principais conclusões tiradas no subcapítulo Amplitude de cargas variáveis definida por blocos:

- Na transição entre os dois blocos de carga (espectro crescente) existe um aumento da velocidade de propagação, seguindo de uma convergência para o valor associado ao segundo bloco de carga;
- Na transição entre os dois blocos de carga (espectro decrescente) existe uma diminuição acentuada da velocidade de propagação, seguindo de uma convergência para o valor associado ao segundo bloco de carga;
- Na mudança de bloco, a velocidade de propagação estabiliza mais rapidamente para o estado plano de deformação (DP);
- Num espectro onde estão apenas presentes blocos com razões de tensões iguais, a velocidade de propagação da fenda (na zona estável) não dependerá do histórico dos blocos no espectro.

Proposta de trabalhos futuros:

- Validar o modelo numérico com resultados experimentais de sobrecargas, utilizando várias razões de sobrecarga;
- Estudar outro tipo de espectros de carga, nomeadamente carregamentos com uma distribuição aleatória, sendo estes mais próximos dos carregamentos reais em serviço;
- Desenvolver uma forma alternativa para calibrar os parâmetros dos critérios de propagação de fenda por fadiga sem ser necessário conhecer

a velocidade de propagação. A utilização da deformação máxima atingida nos ensaios de fadiga oligocíclica pode ser uma abordagem.



## 8. BIBLIOGRAFIA

- [1] C. Moura Branco, J. Martins Ferreira, J. Domingos da Costa, and A. Silva Ribeiro, *Projecto de Órgão de Máquinas*. .
- [2] G. R. Irwin, “Fracture BT - Elasticity and Plasticity / Elastizität und Plastizität,” S. Flügge, Ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1958, pp. 551–590.
- [3] P. Paris and F. Erdogan, “A Critical Analysis of Crack Propagation Laws,” *J. Basic Eng.*, vol. 85, no. 4, pp. 528–533, Dec. 1963, doi: 10.1115/1.3656900.
- [4] F. V. Antunes, S. Serrano, R. Branco, and P. Prates, “Fatigue crack growth in the 2050-T8 aluminium alloy,” *Int. J. Fatigue*, 2018, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2018.03.020.
- [5] E. Wolf, “Fatigue crack closure under cyclic tension,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 2, no. 1, pp. 37–45, 1970, doi: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(70\)90028-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(70)90028-7).
- [6] J. A. F. O. Correia *et al.*, “Modified CCS fatigue crack growth model for the AA2019-T851 based on plasticity-induced crack-closure,” *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 85, pp. 26–36, 2016, doi: 10.1016/j.tafmec.2016.08.024.
- [7] K. Solanki, S. R. Daniewicz, and J. C. Newman, “Finite element analysis of plasticity-induced fatigue crack closure: An overview,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 71, no. 2, pp. 149–171, 2004, doi: 10.1016/S0013-7944(03)00099-7.
- [8] B. Marques, “Análise da propagação de fendas por fadiga utilizando o CTOD,” 2019.
- [9] S. Suresh and R. O. Ritchie, “On the influence of fatigue underloads on cyclic crack growth at low stress intensities,” *Mater. Sci. Eng.*, vol. 51, no. 1, pp. 61–69, 1981, doi: [https://doi.org/10.1016/0025-5416\(81\)90107-5](https://doi.org/10.1016/0025-5416(81)90107-5).
- [10] S. Suresh and R. O. Ritchie, “Geometric Model for Fatigue Crack Closure Induced By Fracture Surface Roughness.,” *Met. Trans a*, vol. V 13A, no. N 9, pp. 1627–1631, 1982, doi: 10.1007/bf02644803.
- [11] K. Donald and P. C. Paris, “An evaluation of  $\Delta K_{eff}$  estimation procedures on 6061-T6 and 2024-T3 aluminum alloys,” *Int. J. Fatigue*, vol. 21, no. SUPPL. 1, pp. 47–57, 1999, doi: 10.1016/S0142-1123(99)00055-9.
- [12] K. Daniel, “Enhanced model of partial crack closure for correlation of R-ratio effects in aluminum alloys,” *Int. J. Fatigue*, vol. 23, no. 2, pp. 95–102, 2001.
- [13] M. Lugo and S. R. Daniewicz, “The influence of T-stress on plasticity induced crack closure under plane strain conditions,” *Int. J. Fatigue*, vol. 33, no. 2, pp. 176–185, 2011, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2010.08.002.
- [14] S. G. Larsson† and A. J. Carlsson, “Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic

- materials,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 21, no. 4, pp. 263–277, 1973, doi: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90024-0).
- [15] C. J. Christopher, M. N. James, E. A. Patterson, and K. F. Tee, “Towards a new model of crack tip stress fields,” *Int. J. Fract.*, vol. 148, no. 4, p. 361, 2008, doi: [10.1007/s10704-008-9209-3](https://doi.org/10.1007/s10704-008-9209-3).
- [16] D. Kujawski, “A new  $(\Delta K + K_{max})^{0.5}$  driving force parameter for crack growth in aluminum alloys,” *Int. J. Fatigue*, vol. 23, pp. 733–740, Sep. 2001, doi: [10.1016/S0142-1123\(01\)00023-8](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(01)00023-8).
- [17] A. H. Noroozi, G. Glinka, and S. Lambert, “A two parameter driving force for fatigue crack growth analysis,” *Int. J. Fatigue*, vol. 27, no. 10–12, pp. 1277–1296, 2005, doi: [10.1016/j.ijfatigue.2005.07.002](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2005.07.002).
- [18] F. V. Antunes, M. S. C. Ferreira, R. Branco, P. Prates, C. Gardin, and C. Sarrazin-Baudoux, “Fatigue crack growth versus plastic CTOD in the 304L stainless steel,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 214, no. February, pp. 487–503, 2019, doi: [10.1016/j.engfracmech.2019.04.013](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.04.013).
- [19] X. Zheng, H. Cui, C. C. Engler-Pinto, X. Su, and W. Wen, “Numerical modeling of fatigue crack propagation based on the theory of critical distances: Effects of overloads and underloads,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 128, no. C, pp. 91–102, 2014, doi: [10.1016/j.engfracmech.2014.07.006](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.07.006).
- [20] B. Marques, L. P. Borrego, J. M. Ferreira, F. V. Antunes, and R. Branco, “A numerical analysis of fatigue crack closure using CTOD,” *Procedia Struct. Integr.*, vol. 18, pp. 645–650, 2019, doi: [10.1016/j.prostr.2019.08.211](https://doi.org/10.1016/j.prostr.2019.08.211).
- [21] F. V. Antunes, S. M. Rodrigues, R. Branco, and D. Camas, “A numerical analysis of CTOD in constant amplitude fatigue crack growth,” *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 85, pp. 45–55, 2016, doi: [10.1016/j.tafmec.2016.08.015](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2016.08.015).
- [22] F. V. Antunes, R. Branco, P. A. Prates, and L. Borrego, “Fatigue crack growth modelling based on CTOD for the 7050-T6 alloy,” *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 40, no. 8, pp. 1309–1320, 2017, doi: [10.1111/ffe.12582](https://doi.org/10.1111/ffe.12582).
- [23] E. Liverani, A. H. A. Lutey, A. Ascari, and A. Fortunato, “The effects of hot isostatic pressing (HIP) and solubilization heat treatment on the density, mechanical properties, and microstructure of austenitic stainless steel parts produced by selective laser melting (SLM),” *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 107, no. 1–2, pp. 109–122, 2020, doi: [10.1007/s00170-020-05072-9](https://doi.org/10.1007/s00170-020-05072-9).
- [24] I. Yadroitsev, P. Bertrand, and I. Smurov, “Parametric analysis of the selective laser melting process,” *Appl. Surf. Sci.*, vol. 253, no. 19, pp. 8064–8069, 2007, doi: [10.1016/j.apsusc.2007.02.088](https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2007.02.088).
- [25] J. M. Manero, F. J. Gil, and J. A. Planell, “Deformation mechanisms of Ti-6Al-4V alloy with a martensitic microstructure subjected to oligocyclic fatigue,” *Acta Mater.*, vol. 48, no. 13, pp. 3353–3359, 2000, doi: [10.1016/S1359-6454\(00\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00152-X).
- [26] J. S. Jesus, L. P. Borrego, J. A. M. Ferreira, J. D. Costa, and C. Capela, “Fatigue crack growth behaviour in Ti6Al4V alloy specimens produced by selective laser melting,” *Int. J. Fract.*, vol. 223, no. 1–2, pp. 123–133, 2020, doi: [10.1016/j.ijfatigue.2020.105001](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2020.105001).

- 10.1007/s10704-019-00417-2.
- [27] H. Tresca, “Memoir on the flow of solid bodies under strong pressure,” *Comptesrendus l’académie des Sci. Paris, Fr.*, vol. 59, p. 754, 1864.
- [28] R. v Mises, “Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand,” *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. Klasse*, vol. 1913, pp. 582–592, 1913.
- [29] R. Hill, “A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals,” *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 193, no. 1033, pp. 281–297, 1948.
- [30] P. Prates, “Inverse Methodologies for Identifying Constitutive Parameters of Metal Sheets,” no. September, p. 200, 2014, doi: 10.13140/RG.2.2.25692.80004.
- [31] J. H. Hollomon, “Tensile deformation,” *Aime Trans*, vol. 12, no. 4, pp. 1–22, 1945.
- [32] H. Swift, “Plastic instability under plane stress,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 1, no. 1, pp. 1–18, 1952.
- [33] P. Ludwik, *Elemente der technologischen Mechanik*. J. Springer, 1909.
- [34] D. C. Ludwigson, “Modified stress-strain relation for FCC metals and alloys,” *Metall. Trans.*, vol. 2, no. 10, pp. 2825–2828, 1971.
- [35] A. K. Ghosh, “Tensile instability and necking in materials with strain hardening and strain-rate hardening,” *Acta Metall.*, vol. 25, no. 12, pp. 1413–1424, 1977.
- [36] J. V Fernandes, D. M. Rodrigues, L. F. Menezes, and M. F. Vieira, “A modified Swift law for prestrained materials,” *Int. J. Plast.*, vol. 14, no. 6, pp. 537–550, 1998.
- [37] M. F. Borges, “Efeito das Propriedades Elasto-Plásticas na Propagação de Fendas por Fadiga,” 2019.
- [38] E. Voce, “The relationship between stress and strain for homogeneous deformation,” *J. Inst. Met.*, vol. 74, pp. 537–562, 1948.
- [39] J. E. Hockett and O. D. Sherby, “Large strain deformation of polycrystalline metals at low homologous temperatures,” *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 23, no. 2, pp. 87–98, 1975.
- [40] W. Prager, “Recent developments in the mathematical theory of plasticity,” *J. Appl. Phys.*, vol. 20, no. 3, pp. 235–241, 1949.
- [41] H. Ziegler, “A modification of prager’s hardening rule\*,” pp. 55–65, 1958.
- [42] P. J. Armstrong and C. O. Frederick, *A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect*, vol. 731. Central Electricity Generating Board [and] Berkeley Nuclear Laboratories ..., 1966.
- [43] M. C. Oliveira, J. L. Alves, and L. F. Menezes, “Algorithms and strategies for treatment of large deformation frictional contact in the numerical simulation of deep drawing process,” *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 15, no. 2, pp. 113–162, 2008, doi: 10.1007/s11831-008-9018-x.
- [44] M. F. Borges, D. M. Neto, and F. V. Antunes, “Numerical simulation of fatigue

crack growth based on accumulated plastic strain,” *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 108, no. April, p. 102676, 2020, doi: 10.1016/j.tafmec.2020.102676.